

BERTRAND, BUFFON, KEYNES : L'ENSEIGNEMENT DU CONCEPT DE HASARD ET DU PRINCIPE D'INDIFFÉRENCE EN STATISTIQUE

Léo Gerville-Réache¹

¹*Université de Bordeaux, CNRS, UMR 5251, France, leo.gerville-reache@u-bordeaux.fr*

Résumé. Le paradoxe de Bertrand pose la question du sens du mot *hasard*. Tracer une corde au hasard dans un cercle semble avoir plusieurs interprétations possibles. Pour Borel, par exemple, le concept de hasard est fondamentalement lié au concept d'invariance et le problème de la corde n'aurait qu'une seule solution. Dans l'aiguille de Buffon, on jette en l'air une baguette haut-dessus d'un parquet à lames et tout le monde s'accorde sur la loi de probabilité que la baguette tombe à cheval sur deux lames adjacentes. Lorsque l'on joue à pile ou face, tout le monde s'accorde sur l'équiprobabilité des deux issues possibles. Dans cette communication, nous proposons de mettre en relation ces différents problèmes avec le concept d'équiprobabilité et le principe d'indifférence de Keynes.

Mots-clés. Paradoxe de Bertrand, aiguille de Buffon, hasard, principe d'indifférence

Abstract. Bertrand's paradox raises the question of the meaning of the word *randomness*. Draw a random chord in a circle seems to have several possible interpretations. For Borel, by example, the concept of chance must be associated to the concept of invariance and the problem of the chord would have only one solution. In Buffon's needle, it tosses up a stick over leaf parquet and everyone agrees on the law of probability that the stick falls on adjacent leaf. When playing heads or tails, everyone agrees on the equiprobability of two possible outcomes. In this paper, we propose to link these problems with the concept of equiprobability and the Keynes's principle of indifference.

Keywords. Bertrand's paradox, Buffon's needle, randomness, principle of indifference

1 Introduction

Le concept de hasard et son existence même fait l'objet de discussions philosophiques et scientifiques depuis des siècles. Ce papier n'a pas pour vocation de revenir sur ce vaste débat mais plus modestement de regarder, avec comme point de départ, le paradoxe de Bertrand et le problème de l'aiguille de Buffon, comment une apparente ambiguïté dans un énoncé peut produire un paradoxe chez les probabilistes mais certainement pas chez les statisticiens. Le problème de la corde pose la question des propriétés fondamentales du hasard: l'invariance, la symétrie, l'indépendance, l'équiprobabilité et finalement le principe d'indifférence.

Le principe d'indifférence de Keynes est à la base de l'hypothèse d'équiprobabilité. Décrit au point d'être quasiment tombé dans l'oubli, ce principe doit reprendre la place et l'attention qu'il mérite au sein du processus d'estimation statistique. Il devrait faire l'objet d'un enseignement détaillé auprès des élèves puis, plus poussé auprès des étudiants, et cela le plus tôt possible dans l'apprentissage des probabilités et de la statistique. Au collège, on pourra déjà le présenter par exemple, dès que l'on aborde le jeu de pile ou face et l'équiprobabilité. Plus tard dans le cursus, on pourra alors poser la question de l'existence d'une stratégie de jeu comme suit:

Lorsque vous jouez à Pile ou Face, vous pensez que vous avez une chance sur deux de gagner à chaque tirage. En êtes-vous sûr? Pouvez-vous le démontrer?

Est-il possible de jouer avec une probabilité de gagner strictement supérieure à 1/2?

Si nous jouons à pile ou face et que vous choisissez pile, alors votre probabilité de gagner est égale à la probabilité que la pièce tombe sur pile. Combien vaut cette probabilité $P(\text{pile})$? Il est en réalité bien difficile de répondre à cette question. En revanche, si vous pariez sur pile avec probabilité $1/2$ (et sur face également avec probabilité $1/2$) alors votre probabilité de gagner est précisément de $1/2$.

Sur quoi devez-vous parier si nous décidons de rejouer avec la même pièce?

On démontre facilement que vous devez parier sur le côté de la pièce qui est tombé au premier lancé. En faisant ainsi, vous maximisez votre probabilité de gagner. En effet, cette probabilité vaut:

$$P(\text{pile}) * P(\text{pile}) + P(\text{face}) * P(\text{face}).$$

Cette probabilité est supérieure ou égale à $1/2$. Elle est égale à $1/2$ uniquement pour $P(\text{pile})=P(\text{face})$. Plus généralement, si n tirages ont déjà été réalisés, vous devez parier, pour le tirage suivant sur le côté de la pièce le plus sorti. En effet, le calcul se complique au fur et à mesure des lancers mais l'optimisation donne la même solution. Cette stratégie statistique est optimale quel que soient les probabilités de la pièce. Au pire, c'est à dire si la pièce est parfaitement équilibrée, vous avez une probabilité de gagner de $1/2$. Mais cette pièce peut-elle être réellement équilibrée?

2 Bertrand et Buffon

Bertrand (1889) propose le problème suivant (qui deviendra le célèbre paradoxe de Bertrand) pour montrer que l'expression "au hasard" n'a pas de sens intrinsèque : "***On trace au hasard une corde sur un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit?***" Pour répondre à cette question, Bertrand propose trois approches géométriques classiques :

- 1) Extrémités aléatoires : *on tire au hasard deux points sur le cercle* qui définissent la corde. La probabilité est alors $1/3$.
- 2) Rayon aléatoire : *on tire au hasard une demi-droite et une distance (d) au centre du cercle* qui définissent la corde, perpendiculaire à la direction donnée et dont la distance au centre est d . La probabilité est alors $1/2$.
- 3) Milieu aléatoire : *on tire au hasard un point à l'intérieur du cercle* qui définit la corde dont le centre est ce point. La probabilité est alors $1/4$.

Par cet exemple (et d'autres), il veut démontrer que c'est l'hypothèse du continu qui est à l'origine de ce genre de problème. En effet, selon lui, quand on dit "on trace une corde au hasard...", l'expression "au hasard" devrait signifier que toutes les cordes sont équiprobables, mais on n'a pas de mesure sur l'ensemble (continu) de toutes les cordes qui permettrait de connaître le poids de chacune."

Remarque : Sur le site Eduscol, on trouve le lien vers une fiche de 2011 qui présente le paradoxe et des simulations numériques des différentes alternatives de hasard : "*L'expérience aléatoire: C est un cercle de centre O et de rayon R . On choisit aléatoirement une corde $[PQ]$ de ce cercle. On s'intéresse à la probabilité que la longueur L de cette corde soit supérieure à $R\sqrt{3}$ (longueur du côté du triangle équilatéral inscrit).*"

Buffon, dès 1778, proposait le problème suivant : "*Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs.*"

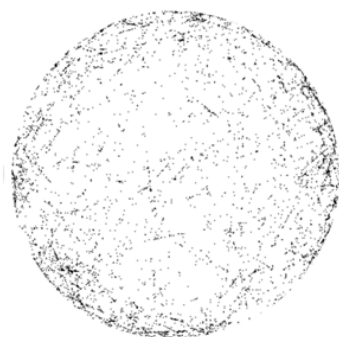
Soit A : le réel compris entre 0 et $\pi/2$ correspondant à l'angle géométrique formé avec les rainures du parquet. Soit R : le réel positif correspondant à la distance du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche. D'après les hypothèses, et en utilisant toutes les symétries, on peut considérer que :

- A , suit une loi uniforme continue sur $[0; \pi/2]$
- R , suit une loi uniforme continue sur $[0; 1/2]$

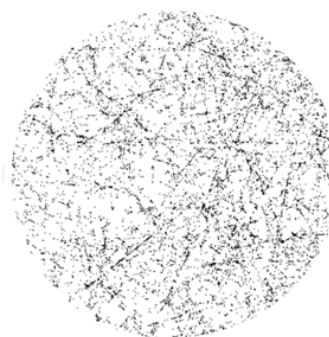
Avec une baguette de longueur égale à la distance entre deux rainures de parquet, la probabilité que la baguette coupe une rainure est de $2/\pi$.

Statistiquement, les quelques études réalisées avec des lancers réels confirment (voir par exemple l'étude participative proposée par l'IREM de Bordeaux en 2016 à l'occasion de la "*Semaine des Mathématiques*") que pour l'aiguille de Buffon, la loi physique expérimentale est bien la loi théorique postulée.

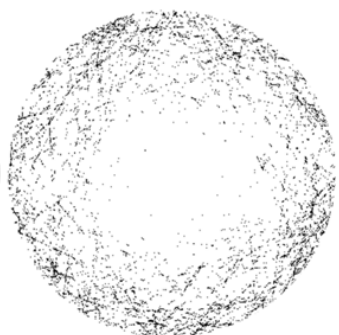
Les graphiques qui suivent, montrent le résultat de simulations numériques pour le paradoxe de Bertrand et l'aiguille de Buffon. Un petit traitement d'image permet de comparer les 4 graphiques sur les mêmes bases visuelles.



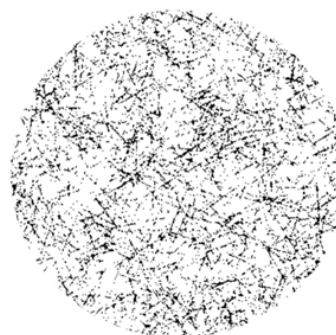
1. Extrémités aléatoires



2. Rayon aléatoire



3. Milieu aléatoire



Aiguille de Buffon

On voit en particulier les effets de bord des cas 1 et 3 du paradoxe et la différence avec l'aiguille de Buffon. La correspondance entre le cas 2 (rayon aléatoire) du paradoxe de Bertrand et l'aiguille de Buffon, est graphiquement (comme théoriquement) claire.

Borel (voir Harthong 1996) reproche à Bertrand *de ne pas avoir perçu l'idée d'invariance, qui existe sur les ensembles numériques, mais pas sur l'ensemble des cordes. Selon lui, c'est l'existence d'une invariance qui fonde l'expression "au hasard"; c'est donc l'absence d'invariance et non le continu qui crée le paradoxe.* Aussi, Borel conclut que seul le cas 2 (rayon aléatoire) est en accord avec l'énoncé de Bertrand.

Le paradoxe de Bertrand et le parallèle avec l'aiguille de Buffon (qui n'est pas un paradoxe) montre que "jeter au hasard", ce n'est pas "tracer au hasard" ou encore "choisir au hasard". La probabilité qu'une corde, "jetée au hasard", ait une longueur supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle vaut $1/2$. Cournot écrit: "*Le hasard, c'est la rencontre de deux séries causales indépendantes*". Les effets de bord des cas 1 et 3 montrent clairement qu'il n'y a pas indépendance entre la loi de probabilité des cordes et le cercle. Le point de vue de Cournot via l'indépendance est à rapprocher de celui de Borel qui traite de la nécessité d'invariance et de celui de Buffon qui impose la symétrie. Il semble clair que ces différentes considérations gravitent autour du concept d'équiprobabilité. Lorsqu'on lance une pièce en l'air, on suppose que la probabilité qu'elle tombe sur

pile est égale à la probabilité qu'elle tombe sur face. La réalité physique est nécessairement différente (l'égalité en la matière n'existe pas). On devrait dire que l'on ne connaît pas de raison particulière pour attribuer des probabilités inégales précises aux deux issues possibles du lancé. C'est ici l'utilisation du principe d'indifférence (également appelé principe de raison insuffisante) qui nous conduit à travailler avec l'équiprobabilité (en attendant éventuellement la preuve que cette hypothèse n'est pas raisonnable).

Laplace est à l'origine du principe de raison insuffisante. Keynes lui préfère le nom de principe d'indifférence et rappelle son caractère essentiellement épistémique. Ce principe a fait l'objet de nombreuses critiques et en particulier sa capacité à générer de nombreux paradoxes. Dans ce qui suit, nous revenons sur quelques exemples de paradoxes liés au principe d'indifférence et montrons qu'il n'en est rien. En effet, les problèmes qui suivent ne démontrent en rien les lacunes de ce principe mais seulement une incompréhension de celui-ci. Les exigences d'invariance, de symétrie ou encore d'indépendance permettent finalement de soutenir la nécessité du principe d'indifférence.

3 Le nécessaire principe d'indifférence

Le principe d'indifférence (Keynes 1921, p. 42), affirme que *"s'il n'y a aucune raison connue pour attribuer à notre sujet une alternative plutôt qu'une autre, parmi plusieurs alternatives possibles, alors, ces alternatives ont une probabilité égale relativement à notre connaissance. Des probabilités égales doivent donc être assignées à chacun des différents arguments, s'il n'y a pas de raison de leur assigner des probabilités inégales."*

Depuis toujours, le principe d'indifférence est l'objet de nombreuses critiques. L'attribution de probabilités équiprobables a priori semble problématique pour certains. Ce principe est en réalité, un principe premier de modélisation statistique. Il guide la construction de l'espace probabilisé associé à un problème d'incertitude totale (maximum d'entropie). Le remettre en cause sans véritable raison, et ne pas l'utiliser, c'est se priver de tout un ensemble de modélisations et donc de décisions. On doit l'interpréter comme une manière d'attribuer des probabilités a priori et non comme le moyen de définir des "vraies probabilités".

NB : La mise à jour a posteriori de ces probabilités via la statistique Bayésienne est sans objet avec les critiques potentielles du principe d'indifférence. On ne peut et on ne doit pas enfermer le principe d'indifférence dans la statistique Bayésienne.

Les trois exemples qui suivent font partie d'une pléiade de "petits paradoxes" dont le but était de discréditer ce principe.

Vin/Eau : un liquide contient un mélange de vin et d'eau tel que le rapport Vin/Eau est compris entre 1/3 et 3. Quelle est la probabilité que le rapport (en volume) Vin/Eau soit inférieur à 2? $P=5/8...P=15/16...?$

Comment appliquer le principe d'indifférence ici. On peut mettre une loi uniforme continue sur le rapport Vin/Eau :

$$\text{Vin/Eau} \sim U[1/3;3]$$

Mais dans ce cas, pourquoi ne pas mettre cette loi uniforme pour le rapport Eau/Vin? Le problème c'est que cela n'est pas égal. La probabilité que le rapport Vin/Eau soit inférieur à 2 n'aura pas la même valeur. Mais, sommes-nous indifférents ici, peut-on être indifférents ici? Posons :

$$\text{Eau} \sim U[x;3x] \text{ et } \text{Vin} \sim U[x;3x], x > 0.$$

Alors la loi de probabilité du rapport Eau/Vin est la même que la loi de probabilité du rapport Vin/Eau. On a symétrie et invariance et on a bien un rapport Vin/Eau entre 1/3 et 3. Selon le principe d'indifférence, la probabilité que le rapport Vin/Eau soit inférieur à 2 est alors de 19/20. De plus ici $P(\text{Eau/Vin}=1)=P(\text{Vin/Eau}=1)=1/2$.

NB : on aura sans doute ici du mal à faire une expérimentation. Ici le hasard est purement conceptuel et le fait de notre ignorance sur la façon dont le mélange a été effectivement réalisé.

Tous les livres sont rouges ou verts : *Vous vous rendez dans une bibliothèque pour emprunter un livre dont vous ne connaissez pas la couleur. Il est un fait que ce livre peut être rouge ou non-rouge. Selon le principe d'indifférence, vous devez postuler que la probabilité que le livre soit rouge est de 1/2 (et non-rouge également 1/2). Mais ce livre peut également être vert ou non-vert et vous devez donc postuler que la probabilité que le livre soit vert est de 1/2. Ainsi, le livre est nécessairement soit rouge soit vert puisque la probabilité qu'il soit rouge plus la probabilité qu'il soit vert vaut un.*

On peut toujours se demander l'intérêt de ce genre de problème. En effet, quel intérêt a-t-on à connaître ou à attribuer une probabilité au fait que le livre soit rouge?

Mettons un enjeu. Vous pouvez parier selon l'une des trois règles suivantes.

- Pari 1 : Je vous propose de parier sur rouge ou non-rouge.
- Pari 2 : Je vous propose de parier sur vert ou non-vert.
- Pari 3 : Je vous propose de parier sur rouge ou vert ou non-rouge-non-vert.

N'ayant aucune information sur les probabilités des couleurs, pour le pari 1 vous devez parier sur rouge avec probabilité 1/2 et sur non-rouge avec probabilité 1/2 car c'est la seule façon que votre probabilité de gagner soit insensible aux probabilités réelles de rouge et non-rouge (votre probabilité de gagner est alors de 1/2). Pour le pari 2 c'est pareil : il faut parier sur vert avec probabilité 1/2... Pour le pari 3, il faut parier avec probabilité 1/3 sur rouge, 1/3 sur vert et 1/3 sur le reste (votre probabilité de gagner est alors de 1/3).

C'est une loi équiprobable sur le choix des modalités du pari qui rend la probabilité de gain indifférente aux probabilités réelles des modalités du pari. Cette probabilité de gain est alors égale à celle que l'on aurait avec des probabilités réelles égales sur les modalités du pari.

C'est uniquement au sein des alternatives d'un même pari que la somme des probabilités doit faire un. Ce n'est pas le principe d'indifférence ou son application qui est paradoxale, c'est d'oublier que la "théorie épistémique des probabilités" est initialement basée sur les paris. On parle alors de "probabilité à parier".

Les bancs publics : *Dans un parc il y a trois bancs à deux places. Roger et Ginette vont s'asseoir "au hasard". Quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent sur le même banc ? Il y a 3 bancs et donc la probabilité que Roger et Ginette se retrouvent sur le même banc est de 1/3. Mais non, il y a 6 places et donc la probabilité que Roger et Ginette se retrouvent sur le même banc est de 1/5!*

Bien sûr, il semble que le mot "hasard" peut avoir deux sens ici:

- si Roger et Ginette choisissent un banc au hasard, alors la probabilité de se retrouver sur le même banc est de 1/3.
- si Roger et Ginette choisissent une place au hasard, alors la probabilité de choisir les deux places d'un même banc est de 1/5.

Les deux réponses semblent raisonnables et, sans connaissance du processus de choix au hasard, il semble impossible de décider entre les deux probabilités.

Pour autant, si Roger et Ginette choisissent chacun de leur côté une place au hasard parmi les 6. Il y a alors une probabilité de 1/6 qu'ils choisissent la même place. Que se passe-t-il dans ce cas? Arrivant devant le banc en question, il va de soi que Roger laisse Ginette s'asseoir en premier (fameux principe de galanterie) et s'assoit sur l'autre place du même banc (cela reste le banc défini par la place qu'il avait choisie au hasard). Il s'ensuit que la probabilité que Roger et Ginette se retrouvent sur le même banc est bien d'un tiers ($1/6 + 1/5 * 5/6$), même dans le cas où chacun choisit au hasard une place.

Plus sérieusement, la probabilité $1/5$ est la probabilité d'être sur le même banc conditionnellement au fait qu'ils ne choisissent pas la même place. Cela correspond au cas où l'un choisirait avant l'autre. Mais dans ce cas, le hasard du premier qui choisit n'est pas le même que le hasard du second et il n'y aurait pas de symétrie des hasards entre les deux protagonistes.

4 Conclusion

Il semble bien plus délicat que prévu (par les sceptiques) de mettre sérieusement en défaut le principe d'indifférence. Son importance et sa pertinence ne doivent pas être sous estimées. Il fonde épistémiquement l'équiprobabilité qui est la loi de base des probabilités (l'entropie est maximale). Son utilisation et son enseignement semblent incontournables et devraient faire l'objet d'une attention particulière. C'est d'avantage un principe statistique que probabiliste dans la mesure où il produit la seule estimation raisonnable, relativement au peu d'informations disponibles: l'ensemble des possibles.

Trouver un exemple où le principe d'indifférence produit une situation paradoxale s'avère finalement difficile. Sauf peut-être avec l'axiomatique de Kolmogorov qui exclut la loi de base des probabilités (loi uniforme ou équiprobabilité) sur un ensemble infini dénombrable comme l'ensemble des entiers naturels mais inclut la loi uniforme sur un ensemble infini non-dénombrable et de cardinal infiniment plus grand que celui des entiers comme, par exemple, la loi uniforme sur l'intervalle réel $[0,1]$! De plus, quelque soit l'entier n , la loi uniforme sur l'ensemble $\{0;1;\dots;n\}$ est mathématiquement parfaitement définie. Mais la limite quand n tend vers l'infini de la suite "d'existence d'une loi uniforme sur $\{0;1;\dots;n\}$ " est la non existence de cette loi uniforme. On ne pourrait donc pas être indifférent sur une infinité dénombrable d'alternatives mais on peut l'être sur l'infinité (infiniment plus vaste) de l'intervalle réel $[0,1]$.

Le problème du continu en probabilité que Bertrand pointe ardemment (et cela bien avant la théorie mathématique des probabilités de Kolmogorov) semble mal illustré par son problème de la corde. Il n'en reste pas moins que le paradoxe du continu persiste.

Bibliographie

- [1] Bertrand, J. (1889). Calcul des probabilités, *Gauthier Villars*, Chap. 1 p. 4.
- [2] Borel E. (1943). Les Probabilités et la vie, *Coll. Que sais-je ?* n° 91, P.U.F.
- [3] Buffon, G.L. (1778). *Le jeu du franc-carreau et le problème de l'aiguille de Buffon*, Essai d'Arithmétique morale, Imprimerie Royale, Paris, Tome Septième, p. 139 - 153.
- [4] Delahaye, J.R. (2011). *Paradoxe de Bertrand*, http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/maths/pages/PM/Ressources/230/Paradoxe_de_Bertrand_.pdf, Eduscol, 5p.
- [5] Harthong J. (1996). *Le paradoxe de Bertrand*, *l'Ouvert* (83), p. 1-15.
- [6] IREM Bordeaux (2016). *Les aiguilles de Buffon*, Semaine des Mathématiques, 14-20 mars. https://shiny.math.cnrs.fr/semaine_des_mathematiques/.
- [7] Keynes J.M. (1921). *A Treatise on Probability*, *London: Macmillan & Co.*
- [8] Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, Ergebnisse Der Mathematik; Foundation of the theory of probability*, *Chelsea Publishing Company*, 1950.