Copules de Laplace des lois gamma multivariees

Philippe Bernardoff [1]

[1] Université de Pau et des Pays de l'Adour LMA, UMR 5142 avenue de l'Université
64000 Pau, France. philippe.bernardoff@univ-pau.fr

Résumé. Cet article propose deux familles de copule sur $[0,1]^n$ obtenue à partir des transformées de Laplace de la loi gamma multivariée et de la loi gamma multi-facteurs. Ces copules permettent notamment d'obtenir des distributions gamma multivariés pour lequelles les fonctions de répartition et les lois de probabilité sont connues.

Mots-clés. Copule, copule de Laplace, familles exponentielles, fonction de Lauricella généralisée, fonction de répartition, fonction hypergéométrique généralisée, loi gamma multi-facteurs, loi gamma multivariée, loi indéfiniment divisible, rho de Spearman, tau de Kendall, transformation de Laplace.

Abstract. This paper provides two copula families on $[0,1]^n$ obtained from the Laplace transforms of the multivariate gamma distribution and the multi-factor gamma distribution. These copulas allow in particular to obtain multivariate gamma distributions for which the cumulative distribution functions and the probability distribution functions are known.

Keywords. Cumulative distribution function, copula, exponential families, infinitely divisible distribution, generalized hypergeometric function, generalized Lauricella functions, Kendall's tau, Laplace copula, Laplace transform, multi-factor gamma distribution, multivariate gamma distribution, Spearmann's rho.

1 Introduction

Cet article permet de produire des fonctions de répartitions explicites (fr) et des mesures de probabilité (mp) de loi gamma multivariées et de loi gammma multi-facteurs. Ainsi, nous présentons deux nouvelles familles de copules multivariées. De (Sklar, 1959) qui indique que la fr F d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ avec fr marginales continues peut être écrite de manière unique sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C[F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)], \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

où n est la dimension du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$, où $C : [0,1]^n \to [0,1]$ est une copule et où $F_1, \ldots, F_n$ sont les fr marginales de $\mathbf{X}$.

Si f est la densité de probabilité (dp) du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ et $f_1, \ldots, f_n$ les dp marginales de $\mathbf{X}$, alors $c(u_1, \ldots, u_n) = \partial^n/(\partial u_1 \ldots \partial u_n) C(u_1, \ldots, u_n)$, et nous avons l'égalité

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c[F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)] f_1(x_1) \ldots f_n(x_n). \tag{2}$$

L'égalité (1) ne peut pas donner simplement la copule C pour la loi gamma multivariée et pour la loi gamma multi-facteurs. Mais avec Joe (1997), nous pouvons donner des copules déduites de la transformée de Laplace de ces lois. En appliquant les formules (1) et (2), nous obtenons de nouvelles loi gamma multivariées et gamma multi-facteurs.

L'article est organisé de la manière suivante. La section 2 donne les définitions des lois gamma multivariée et des lois gamma multi-facteurs, puis considère les cas $n = 2, 3$. Enfin, nous définissons la copule de Laplace. La Section 3 donne les deux résultats principaux et étudie les cas $n = 2, 3$. La famille BB10 donnée par (Joe, 1997, 2014) est généralisée.

2 Loi gamma multivariée et loi gamma multi-facteurs

Dans la littérature, les loi gamma multivariée sur $\mathbb{R}^n$ ont plusieurs définitions non équivalentes. De nombreux auteurs demandent seulement que les lois marginales soient des lois gamma ordinaires (Balakrishnan et al., 1997). Nous utilisons l'extension de la définition classique unidimensionnelle à $\mathbb{R}^n$ obtenue comme suit. Nous considèrons un polynôme affine $P(\theta)$ en $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ où affine signifie que pour $j = 1, \ldots, n$, $\partial^2 P/\partial\theta_j^2 = 0$. Nous supposons également que $P(\mathbf{0}) = 1$.

Nous notons $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}([n])$ la famille de tous les sous-ensembles de $[n] = \{1, \ldots, n\}$ et $\mathfrak{P}_n^*$ la famille des sous-ensembles non vides de $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Si n est fixé et s'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons respectivement ces familles $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^*$.

Nous notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Si $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, alors $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $a_\alpha = a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ et $\mathbf{z}^\alpha = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i} = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$. Pour T dans $\mathfrak{P}_n$, nous écrivons plus simplement $\mathbf{z}^T = \prod_{t \in T} z_t$ au lieu de $\mathbf{z}^{\mathbf{1}_T}$ où $\mathbf{1}_T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i = 1$ si $i \in T$ et $\alpha_i = 0$ si $i \notin T$. Nous écrivons $\mathbf{z}^{-T}$ pour $\prod_{t \in T} 1/z_t$. Pour une application $a : \mathfrak{P} \to \mathbb{R}$, nous utilisons la notation $a : \mathfrak{P} \to \mathbb{R}$, $T \mapsto a_T$. Avec cette notation, un polynôme affine de terme constant égal à 1 est $P(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{T \in \mathfrak{P}} p_T \boldsymbol{\theta}^T$, avec $p_\varnothing = 1$. Si $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$, nous notons $a_{\{t_1, \ldots, t_k\}} = a_{t_1 \ldots t_k}$. Un polynôme affine de terme constant égal à 1 s'écrit $P(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{T \in \mathfrak{P}} p_T \boldsymbol{\theta}^T$, avec $p_\varnothing = 1$. La fonction indicatrice d'un ensemble S est notée $\mathbb{1}_S$, *i.e.* $\mathbb{1}_S(x) = 1$ pour $x \in S$ et 0 pour $x \notin S$.

Définition 1 *Nous fixons $\lambda > 0$. Si un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ sur $\mathbb{R}^n$ de mesure de probabilité (mp) $\mu_{\mathbf{X}}$ est telle que sa transformée de Laplace soit*

$$\mathbb{E}\{\exp[-(\theta_1 X_1 + \cdots + \theta_n X_n)]\} = [P(\boldsymbol{\theta})]^{-\lambda}, \tag{3}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance, pour un ensemble de $\boldsymbol{\theta}$ d'intérieur non vide. Nous notons $\mu_{\mathbf{X}} = \gamma_{(P,\lambda)}$ et l'appelons la loi gamma multivariée associée à (P,λ). Ces lois sont présentes dans la classification des familles exponentielles naturelles (Bar-Lev et al., 1994).*

Définition 2 *Nous étendons la première définition à la loi gamma multi-facteurs, notée $\gamma_{(P,\Lambda)}$, associée à (P,Λ) où $\Lambda = (\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geqslant \lambda > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ par sa transformée de Laplace*

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\left(\theta_1 X_1 + \cdots + \theta_n X_n\right)\right]\right\} = \left[P\left(\boldsymbol{\theta}\right)\right]^{-\lambda} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + p_i \theta_i\right)^{-(\lambda_i - \lambda)}. \tag{4}$$

Nous donnons d'abord une proposition dont la démonstration est évidente :

Proposition 3 *Un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ de loi $\gamma_{(P,\Lambda)}$ est obtenu de la manière suivante : Soit $\mathbf{Y}$ un vecteur aléatoire de loi $\gamma_{P,\lambda}$. Soit $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ un vecteur aléatoire constitué de marges indépendantes de loi gamma unidimensionnelle $\gamma_{(p_i,\lambda)}\left(\mathrm{d}x\right) = x^{\lambda-1} p_i^{-\lambda} / \Gamma\left(\lambda\right) \exp\left(-x/p_i\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(x\right) \mathrm{d}x$, et tel que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Y}$ soit independents. Alors le vecteur $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z}$ a pour transformée de Laplace (4), et est de loi $\gamma_{(P,\Lambda)}$.*

Pour $n = 2$, voir (Dussauchoy et Berland, 1972). Les mp et les fr de ces lois sont inconnues, sauf dans le cas $n = 2$ pour la loi $\gamma_{(P,\lambda)}$. Soit F_m^p la fonction hypergéométrique généralisée (Slater, 1966) définie par $F_m^p\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_m; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_m)_k} \frac{z^k}{k!}$, où $(a)_k = \Gamma\left(a+k\right)/\Gamma\left(a\right)$ pour $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, ou plus généralement par $(a)_0 = 1$, $(a)_{n+1} = (a+n)(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, est le symbole Pochhammer. Pour simplifier, F_m^0 est noté F_m. Bernardoff (2006) donne la

Proposition 4 *Soit $P_2\left(\theta_1, \theta_2\right) = 1 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2$ tel que $p_1, p_2 > 0$ et $p_{1,2} > 0$. Soit $\mu = \boldsymbol{\gamma}_{(P_2,\lambda)}$. La mesure μ existe si et seulement si $c = \left(p_1 p_2 - p_{12}\right)/p_{12}^2 > 0$, et $\boldsymbol{\gamma}_{(P_2,\lambda)}\left(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2\right) = p_{12}^{-\lambda} [\Gamma\left(\lambda\right)]^{-2} \mathbf{e}^{-\left(\frac{p_2}{p_{12}}x_1 + \frac{p_1}{p_{12}}x_2\right)} \left(x_1 x_2\right)^{\lambda-1} F_1\left(\lambda; c x_1 x_2\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)^2}\left(\mathbf{x}\right) \mathrm{d}\left(\mathbf{x}\right)$.*

Soit F_I la fonction de Lauricella généralisée (Panda, 1973) telle que $F_I\left(a, b, c, \mathbf{z}\right) = \sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1}(b)_{m_2}(c)_{m_3}}{(a+c)_{m_1+m_3}(b+c)_{m_2+m_3}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \frac{z_3^{m_3}}{m_3!}$, alors nous avons le théorème suivant

Théorème 5 *La loi $\boldsymbol{\gamma}_{(P_2,\Lambda)}$, où $\Lambda = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ avec $\lambda_i \geqslant \lambda$, $i = 1, 2$, est donnée par l'égalité*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_{(P_2,\Lambda)}\left(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2\right) = {} & p_{12}^{-\lambda} p_1^{-(\lambda_1-\lambda)} p_2^{-(\lambda_2-\lambda)} [\Gamma\left(\lambda_1\right)\Gamma\left(\lambda_2\right)]^{-1} x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2-1} \mathbf{e}^{-\left(\frac{p_2}{p_{12}}x_1 + \frac{p_1}{p_{12}}x_2\right)} \\ & \times F_I(\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 - \lambda, \lambda, \tfrac{p_{12}}{p_1}x_1, \tfrac{p_{12}}{p_2}x_2, c x_1 x_2) \mathbb{1}_{(0,\infty)^2}\left(x_1, x_2\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,\end{aligned} \tag{5}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda$ dans l'égalité (5), nous obtenons le résultat de Chatelain *et al.(* 2008).

Bernardoff (2006) donne une condition nécessaire et suffisante pour l'infinie divisibilité de la loi gamma multivariée associé à (P, λ), *i.e.* la transformée de Laplace de $\gamma_{(P,\lambda)}$ puissance $t > 0$ est encore la transformée de Laplace d'une mesure positive :

Théorème 6 *Soit* $\mu = \gamma_{(P,\lambda)}$, *où* $\lambda > 0$ *et* $P(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{T\in\mathfrak{P}_n} p_T \boldsymbol{\theta}^T$ *est telle que* $p_i > 0$, *pour tout* $i \in [n]$, *et* $p_{[n]} > 0$. *Soit* $\widetilde{P}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{T\in\mathfrak{P}_n} \widetilde{p}_T \boldsymbol{\theta}^T$ *le polynôme affine de tel que* $\widetilde{p}_T = -p_{\overline{T}}/p_{[n]}$ *pour tout* $T \in \mathfrak{P}_n$,*où* $\overline{T} = [n] \setminus T$.
Soit $\widetilde{b}_S = b_S(\widetilde{P}) = \sum_{k=1}^{|S|} (k-1)! \sum_{\mathcal{T}\in\Pi_S^k} \prod_{T\in\mathcal{T}} \widetilde{p}_T$, *où* $|S|$ *est le cardinal de l'ensemble* S *et* Π_S^k *est l'ensemble des partitions* S *en* k *sous-ensembles. La loi* μ *est indéfiniment divisible si et seulement si* $\widetilde{p}_i < 0$ *pour tout* $i \in [n]$, *et* $\widetilde{b}_S \geqslant 0$ *pour tout* $S \in \mathfrak{P}_n^*$ *tel que* $|S| \geqslant 2$.

Pour $n = 3$, soit F_{II} la fonction de Lauricella généralisée telle que $F_{II}(\lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, z_3, z_4) = \sum_{m_1,\dots,m_4=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_1)_{m_1+m_2+m_3} (\lambda_2)_{2m_1+m_2+m_4}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \frac{z_3^{m_3}}{m_3!} \frac{z_4^{m_4}}{m_4!}$, alors

Théorème 7 *Si,* $p_i > 0$ *pour* $i \in [3]$, $p_{ij} > 0$ *pour* $(i,j) \in [3]^2$,
$\widetilde{b}_{ij} = -b_k/p_{123} + p_{jk}p_{ik}/p_{123}^2 \geqslant 0$ *pour* $i \neq j$ *et* $\{i,j,k\} = [3]$, $p_{123} > 0$, *et*
$\widetilde{b}_{123} = -1/p_{123} + p_{12}p_1/p_{123}^2 + p_{13}p_2/p_{123}^2 + p_{23}p_1/p_{123}^2 + 2p_{12}p_{13}p_{23}/p_{123}^3 \geqslant 0$, *nous avons*

$$\begin{aligned}\gamma_{(P,\lambda)}(\mathrm{d}\mathbf{x}) &= p_{123}^{-\lambda} [\Gamma(\lambda)]^{-3} \exp(\widetilde{p}_1 x_1 + \widetilde{p}_2 x_2 + \widetilde{p}_3 x_3) (x_1x_2x_3)^{\lambda-1} \\ &\quad \times F_{II}(\lambda, \lambda, \widetilde{b}_{13}x_1x_3\widetilde{b}_{23}x_2x_3, \widetilde{b}_{123}x_1x_2x_3, \widetilde{b}_{12}x_1x_2, \widetilde{b}_{13}x_1x_3 + \widetilde{b}_{23}x_2x_3) \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \quad (6)\end{aligned}$$

Pour $p_{123} = 0$, voir (Letac et Wesołowski, 2008) . Si $\widetilde{b}_{12} = \widetilde{b}_{13} = \widetilde{b}_{23} = 0$, nous obtenons $\gamma_{(P,\lambda)}(d\mathbf{x}) = p_{123}^{-\lambda} [\Gamma(\lambda)]^{-3} \mathbf{e}^{(\widetilde{p}_1x_1+\widetilde{p}_2x_2+\widetilde{p}_3x_3)} (x_1x_2x_3)^{\lambda-1} F_2\left(\lambda, \lambda; \widetilde{b}_{123}x_1x_2x_3\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, et si $\lambda = 1$, nous obtenons la loi de Kibble et Moran (Balakrishnan *et al.*, 2000).

Nous utilisons le Théorème 2.1, p. 835, et son corollaire, de Marshall and Olkin (Marshall and Olkin, 1988) pour donner la définition suivante

Définition 8 *Soit* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ *un vecteur aléatoire de* $]0, +\infty[^n$ *de transformée de Laplace* $\varphi_{\mathbf{X}}$ *définie par* $L_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \varphi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathbb{E}\{\exp[-(\theta_1X_1 + \cdots + \theta_nX_n)]\}$. *Soit* φ_{X_i} *la transformée de Laplace de la variable aléatoire* X_i, *définie par* $L_{X_i}(\theta_i) = \varphi_{X_i}(\theta_i) = \mathbb{E}[\exp(-\theta_iX_i)]$, *de fonction réciproque* $\varphi_{X_i}^{-1}$. *Alors, la fonction* $C_{L_{\mathbf{X}}}$ *définie par* $C_{L_{\mathbf{X}}}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{\mathbf{X}}\left[\varphi_{\mathbf{X}_1}^{-1}(u_1), \dots, \varphi_{\mathbf{X}_n}^{-1}(u_n)\right]$ *est une copule. Nous appelons cette copule* $C_{L_{\mathbf{X}}}$ *la copule de Laplace associée au vecteur aléatoire* $\mathbf{X}$. *Si* $\mathbf{X}$ *a pour loi* $\mu_{\mathbf{X}}(\mathrm{d}\mathbf{x})$, *nous notons aussi* $C_{L_{\mathbf{X}}}$ *par* $C_{L_{\mu_{\mathbf{X}}}}$.

3 Résultats principaux et cas $n = 2, 3$

Maintenant, nous pouvons donner les deux principaux résultats de cet article

Théorème 9 *Soit* P *un polynôme affine en les* n *variables* θ_i, $i = 1, \dots, n$, *avec* $P(\mathbf{0}) = 1$, *alors la copule de Laplace de* $\gamma_{(P,\lambda)}$ *est*

$$C_{L_{\gamma_{(P,\lambda)}}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^{[n]}[1 + \sum_{T\subset[n],|T|>1} (-1)^{|T|} P(-\tfrac{1}{\mathbf{p}}\mathbf{1}_T) \prod_{t\in T} (1 - v_t^{\frac{1}{\lambda}})]^{-\lambda}, \quad (7)$$

où $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)$, $|T|$ *est le cardinal de* T *et le vecteur* $\frac{1}{\mathbf{p}}\mathbf{1}_T$ *est défini par* $(\frac{1}{\mathbf{p}}\mathbf{1}_T)_i=\frac{1}{p_i}$ *si* $i\in T$, $(\frac{1}{\mathbf{p}}\mathbf{1}_T)_i=0$ *si* $i\notin T$, *pour* $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Théorème 10 *Soit* P *un polynôme affine en les* n *variables* θ_i, $i=1,\ldots,n$, *avec* $P(\mathbf{0})=1$, *soit* $\Lambda=(\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *avec* $\lambda_i\geqslant\lambda>0$, *pour* $i\in[n]$, *alors la copule de Laplace de* $\gamma_{(P,\Lambda)}$ *est*

$$C_{L_{\gamma_{(P,\Lambda)}}}(\mathbf{v})=\mathbf{v}^{[n]}[1+\sum\nolimits_{T\subset[n],|T|>1}(-1)^{|T|}P(-\tfrac{1}{\mathbf{p}}\mathbf{1}_T)\prod\nolimits_{t\in T}(1-v_t^{\frac{1}{\lambda_t}})]^{-\lambda}. \tag{8}$$

Pour le cas bidimensionnel, le théorème (9) et le théorème (10) donnent le corollaire suivant

Corollaire 11 *Pour la loi gamma bivariée, nous avons*

$$C_{L_{\gamma_{(P,\lambda)}}}(v_1,v_2)=v_1v_2[1-r(1-v_1^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_2^{\frac{1}{\lambda}})]^{-\lambda},$$

où, pour $\mathbf{X}=(X_1,X_2)$ *de loi* $\gamma_{(P,\lambda)}$, $r=-P(-p_1^{-1},-p_2^{-1})=1-p_{12}/(p_1p_2)$ *est le coefficient de corrélation linéaire (ccl) des variables* X_1, X_2 $(0\leqslant r\leqslant1)$. *C'est la copule de la famille BB10 dans (Joe 1997). Pour la loi gamma bi-facteurs nous avons*

$$C_{L_{\gamma_{(P,\Lambda)}}}(v_1,v_2)=v_1v_2[1-r(1-v_1^{\frac{1}{\lambda_1}})(1-v_2^{\frac{1}{\lambda_2}})]^{-\lambda}, \tag{9}$$

où, pour $\mathbf{X}=(X_1,X_2)=(Y_1,Y_2)+(Z_1,Z_2)=\mathbf{Y}+\mathbf{Z}$ *tel que défini dans la proposition 3 de loi* $\gamma_{(P,\Lambda)}$, *et* $0\leqslant r\leqslant1$, *est le ccl des variables aléatoires* Y_1, Y_2. *Cette famille bivariée ne figurent pas dans les livres de Joe (1997, 2014).*

En suivant Joe (2014), nous pouvons donner les résultats suivants

Proposition 12 *Le tau de Kendall et le rho de Spearman de* $\gamma_{(P,\Lambda)}$ *sont*

$$\begin{aligned}\tau=1&-F_2^3\left(2\lambda,1,1;2\lambda_1+1,2\lambda_2+1;r\right)+\tfrac{4\lambda}{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}r_{12}F_2^3\left(2\lambda+1,1,2;2\lambda_1+2,2\lambda_2+2;r\right)\\&-\tfrac{\lambda^2}{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}r^2F_2^3\left(2\lambda+2,2,2;2\lambda_1+3,2\lambda_2+3;r\right),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\rho_S=3\left[F_2^3(1,1,\lambda;2\lambda_1+1,2\lambda_2+1,r)-1\right] \tag{11}$$

Pour le cas $n=3$, le théorème (9) et le théorème (10) donnent le corollaire suivant

Corollaire 13 *Pour la loi gamma trivariée, nous avons*

$$\begin{aligned}C_{L_{\gamma_{(P,\lambda)}}}(v_1,v_2,v_3)=v_1v_2v_3[1&-r_{12}(1-v_1^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_2^{\frac{1}{\lambda}})-r_{13}(1-v_1^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_3^{\frac{1}{\lambda}})\\&-r_{23}(1-v_2^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_3^{\frac{1}{\lambda}})+2r_{123}(1-v_1^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_2^{\frac{1}{\lambda}})(1-v_3^{\frac{1}{\lambda}})]^{-\lambda},\end{aligned} \tag{12}$$

où, pour $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ *de loi* $\gamma_{(P,\lambda)}$, *nous notons* $r_{ij} = -P(-\frac{1}{p}\mathbf{1}_{\{i,j\}}) = 1 - p_{ij}/(p_i p_j)$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, *le ccl des* X_i, X_j *vérifie* $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, *et nous notons* r_{123} *le nombre* $r_{123} = \mathbb{E}\{\prod_{i=1}^{3} [X_i - \mathbb{E}(X_i)]\} / \prod_{i=1}^{3} (\mathbb{E}\{[X_i - \mathbb{E}(X_i)]^3\})^{1/3} = -P(-p_1^{-1}, -p_2^{-1}, -p_3^{-1})/2.$
Pour la loi gamma tri-facteurs, nous avons

$$C_{L_{\gamma_{(P,\Lambda)}}}(v_1, v_2, v_3) = v_1 v_2 v_3 [1 - r_{12}(1 - v_1^{\frac{1}{\lambda_1}})(1 - v_2^{\frac{1}{\lambda_2}}) - r_{13}(1 - v_1^{\frac{1}{\lambda_1}})(1 - v_3^{\frac{1}{\lambda_3}}) - r_{23}(1 - v_2^{\frac{1}{\lambda_2}})(1 - v_3^{\frac{1}{\lambda_3}}) + 2r_{123}(1 - v_1^{\frac{1}{\lambda_1}})(1 - v_2^{\frac{1}{\lambda_2}})(1 - v_3^{\frac{1}{\lambda_3}})]^{-\lambda}, \quad (13)$$

où, pour $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) = (Y_1, Y_2, Y_3) + (Z_1, Z_2, Z_3)$ *comme dans la proposition 3 de loi* $\gamma_{(P,\Lambda)}$, *où* $0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, *est le ccl des* Y_i, Y_j, *et* r_{123} *est défini avec les* Y_i.

Bibliographie

[1] Balakrishnan, N., Johnson, N. L. and Kotz, S. (2000), *Continuous Multivariate Distributions, volume 1 : Models and Applications, 2 edition,* Wiley, New York.
[2] Bar-Lev, S.K., Bshouty, D., Enis, P., Letac, G., Lu, I., and Richards, D. (1994), The diagonal multivariate natural exponential families and their classification. *J. Theoret. Probab.* 7, 883–929.
[3] Bernardoff, P. (2006), Which multivariate gamma distributions are infinitely divisible? *Bernoulli,* 12(1), 169–189.
[4] Chatelain, F., Tourneret, J. Y., Inglada, J. (2008), Change detection in multisensor SAR images using bivariate gamma distributions. *IEEE Trans. Image Process,* 17(3), 249–258.
[5] Dussauchoy, A. and Berland, R. (1972), Lois gamma à deux dimensions, *Comptes-rendus Acad. des Sciences de Paris,* 274,1946–1949.
[6] Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependance Concepts,* Chapman&Hall, Boca Raton London New York Washington, D.C.
[7] Joe, H. (2014), *Dependence Modeling with Copulas,* Chapman&Hall, Boca Raton London New York.
[8] Letac, G. and Wesołowski, J. (2008), Laplace transforms which are negative powers of quadratic polynomials, T*rans. Amer. Math. Soc.,* 12, 6475–6496.
[9] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988), Families of Multivariate Distributions, *JAMS,* 83**,** 934–841.
[10] Panda R. (1973), Some integrals associated with the generalized Lauricella functions, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.),* 16(30), 115–122.
[11] Sklar, A.,(1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris,* 8, 229–231.
[12] Slater, L. J. (1966), *Generalized Hypergeometric Functions,* Cambridge University Press, Cambridge.