Un model de vie accélérée avec stress variable pour modéliser la fiabilité de systèmes réparables avec pannes cachées du système de régulation.

Vincent Couallier

Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR CNRS 5251, Université de Bordeaux.
vincent.couallier@u-bordeaux.fr

Résumé. Ce travail porte sur le calcul de la fiabilité de composants (éléments remplaçables d'un système) fragilisés par un stress (une covariable influençant la loi de durée de vie), dont le monitoring (le suivi des conditions environnementales et l'observation de l'état de bon fonctionnement) n'est pas possible hors de dates spécifiées à l'avance (dates d'inspections), mais dont la valeur du stress peut être contrôlée par des systèmes adéquats (composant de régulation), composants eux aussi susceptibles de tomber en panne. Le modèle est un modèle AFT pour stress variable et stochastique, placé dans un cadre de processus d'évènements récurrents.

Mots-clés. Modèle de vie accélérée, prédiction de courbe de fiabilité, régression avec covariables dépendantes du temps, systèmes réparables, politique de maintenance.

Abstract. The aim of this paper is first to describe how the reliability characteristics of a component living in a environment with controlled stress may be modified by taking into account of random failure of control device. In a quite simple model, it reduces to a step-stress model where the unique time of change point for the stress is unknown and follows a given lifetime distribution. Then standard results obtained by applying parametric cumulative damage models (also known as Sedyakin models) are introduced in the repairable systems theory.

Keywords. Accelerated Failure Time models, reliability prediction, time-dependent covariate in regression, repairable systems, maintenance policy.

1 Introduction

Ce travail se place dans le cadre de l'analyse statistique et de la modélisation aléatoire pour la fiabilité des systèmes industriels. Souvent, des covariables (comme la température ambiante, les valeurs de contraintes mécaniques, l'intensité ou le voltage d'un courant électrique) agissent sur la loi de probabilité des durées de vie des composants. Alors qu'en biostatistique le modèle standard pour analyser et tester l'effet de covariables est le modèle semi-paramétrique de Cox, celui qui prédomine en statistique industrielle est le modèle AFT, en raison d'une bonne compréhension par l'utilisateur de l'effet des stress sur les lois de fiabilité, mais aussi par la prédominance des modèles paramétriques (type Weibull, LogNormal, Gamma) pour la modélisation.

Bien que les covariables (les stress) puissent être des facteurs contrôlés dans les analyses de laboratoire (les essais accélérés), l'environnement sur le terrain peut ne pas être aussi maîtrisé, voire connu. Le monitoring des conditions de vie permet parfois de modéliser et d'estimer (si les données sont disponibles) la fiabilité dans des environnements stochastiques mais en l'absence de telles observables, l'utilisateur est contraint, soit d'affecter une valeur par défaut au stress dans un profil moyen d'utilisation, soit d'intégrer cette incertitude sous l'hypothèse d'une distribution des contraintes dans la population.

Ce travail joue sur ces deux aspects en considérant un cas très simple qui fournit pourtant un modèle adéquat à une problématique industrielle : le calcul de la fiabilité de composants fragilisés par un stress, dont le monitoring n'est pas possible, mais dont les valeurs du stress peuvent être contrôlées par des systèmes adéquats pourtant faillibles eux aussi.

Nous rappelons dans un premier temps le modèle standard de vie accéléré, pour l'étendre au cas des stress variables, dans un premier temps contrôlés, puis aléatoires. L'application reposant sur des stress constants par paliers, nous nous focalisons sur ce cas. Comme l'objectif est de placer ces résultats dans le cadre industriel de la maintenance des systèmes réparables, nous rappelons aussi les notations utiles afin de montrer comment les résultats obtenus permettent de borner la perte de fiabilité (MTBF) liée à la perte aléatoire de régulation du stress.

2 Notations - Motivation sur un cas test industriel

Un composant embarqué sur un système (automobile, aéronautique) peut subir une défaillance au bout d'un moment aléatoire T. La découverte de cette éventuelle défaillance peut être immédiate, auquel cas une période de maintenance démarre et aboutit au remplacement (par un nouveau composant), au bout d'un temps R. Le remplacement parfait avec durée négligeable R coïncide avec la définition d'un processus de renouvellement (Asher et Feingold, 1984) pour la séquence $(T_i)_{i\geq 0}$, avec $T_0 = 0$ si les durées entre défaillances $(D_i)_{i\geq 1}$ où $D_i = T_i - T_{i-1}$ sont supposées i.i.d., cadre très souvent supposé pour une "maintenance parfaite dans un environnement stationnaire".

Cependant la découverte d'une défaillance peut ne pas être immédiatement découverte (c'est le cas des pannes cachées), auquel cas un des modèles standards de maintenance (majoritaire en aéronautique) suppose une politique d'inspections périodiques de délai $\Delta I > 0$: toutes les ΔI unités de temps, une inspection permet d'observer l'état du composant et de détecter une éventuelle défaillance.

Enfin, la succession des durées inter-défaillances $(D_i)_{i\geq 1}$ ne doit pas être modélisée par une séquence identiquement distribuée de durées de vie s'il existe une variabilité connue dans l'environnement, liée par exemple à la variation du niveau d'un stress. Dans ce cas, si on monitore le suivi du stress, il est naturel de modéliser la loi de D_i conditionnellement à l'historique du stress.

Notre cas d'étude reprend certaines de ces conditions pour modéliser un système embarqué modélisé par deux composants tels que :

- un composant réparable (qui fournit une fonction principale pour le système) admet une loi de probabilité P_θ pour sa durée de vie, où $\theta \in I\!R^d$. On note $R(d, \theta) = P_\theta(D > d)$ sa fonction de survie et $MTTF_\theta$ son espérance.
- Un modèle de vie accéléré pour stress fixés et constants permet de modéliser le paramètre θ en fonction de covariables $\mathbf{X}$ décrivant l'environnement. Si θ_1 est la valeur du paramètre pour $\mathbf{X} = x_0$, si θ_2 est la valeur du paramètre pour $\mathbf{X} = x_1$,

alors on a la relation suivante : il existe une fonction AF de x_0 et x_1 telle que

$$R_{x_1}(t) = R(t, \theta_1) = R_{x_0}(AF(x_0, x_1)\ t, \theta_0). \tag{1}$$

Très souvent, la loi de probabilité choisie est dans une classe de lois "log-location-scale" comme les lois de Weibull, Log-Normale, ou Log-Logistique, voir Meeker (1998), ou Lawless (2011), pour plus de détails.

– Un second composant réparable (composant de contrôle, comme une sonde de température) permet de monitorer et de contrôler l'environnement : tant que ce composant est opérationnel, le stress est maintenu à une valeur nominale x_0. En cas de défaillance, et tant que le composant de contrôle n'est pas réparé, le stress n'est plus contrôlé et on supposera dans la suite qu'il prend une valeur élevée x_1 connue.
– La politique d'inspection et de maintenance ne permet pas de détecter les dates de défaillances, mais uniquement d'accéder à l'inspection des composants à des dates régulières.

3 Modèle AFT de dommage cumulé

Le modèle AFT pour stress constant (1) a été généralisé aux covariables dépendantes du temps sous la forme très naturelle du modèle de dommages cumulés. Basé sur le principe physique de Sedyakin (1966) qui suppose que pour deux populations d'unités fonctionnant sous des stress $x_0 \neq x_1$, les deux instants t et t^* sont équivalents si les probabilités de non défaillance sont égales avant ces moments, c'est à dire que :

$$R_{x_1}(t) = R_{x_0}(t^*),$$

ce principe permettant de prolonger le modèle AFT standard aux stress en escalier de la forme :

$$x(t) = x_0 \mathbf{1}_{0 \leq t \leq e} + x_1 \mathbf{1}_{t > e}, \tag{2}$$

puis pour des stress en escalier à plusieurs paliers, et enfin pour un stress temporel quelconque $x(.)$ par la relation (Nikulin, Gerville-Réache et Couallier, 2007) :

$$R_{x(.)}(t) = R_{x_0}\left(\int_0^t AF[x_0, x(\tau)] d\tau\right). \tag{3}$$

Dans la suite, on donne des expressions pour les fonctions de fiabilité et pour les espérances sous diverses configurations de stress variables, et d'information disponible sur les dates de saut.

3.1 Résolution pour un stress à un saut déterministe

Les stress à un saut de type (2) pour une date de saut fixée e permettent d'écrire la fonction de survie de la façon suivante (Bagdonavicius et Nikulin, 2001 ou Nikulin, Gerville-Réache et Couallier, 2007) :

$$R_{x(.)}(t) = R_{x_0}(t) \mathbf{1}_{t \leq e} + R_{x_1}(t - e + e^*) \mathbf{1}_{t > e} \tag{4}$$

où le moment e^* est déterminé par l'égalité : $R_{x_0}(e) = R_{x_1}(e^*)$, c'est à dire $e^* = e/AF(x_0, x_1)$. Puisque le modèle AFT s'applique entre R_{x_0} et R_{x_1} on a alors

$$R_{x(.)}(t) = R_{x_0}(t)\mathbf{1}_{t\leq e} + R_{x_0}(AF(x_0, x_1)t - e(AF(x_0, x_1) - 1))\mathbf{1}_{t>e}. \tag{5}$$

La figure suivante représente le principe de dommage cumulé pour un stress à un saut connu e.

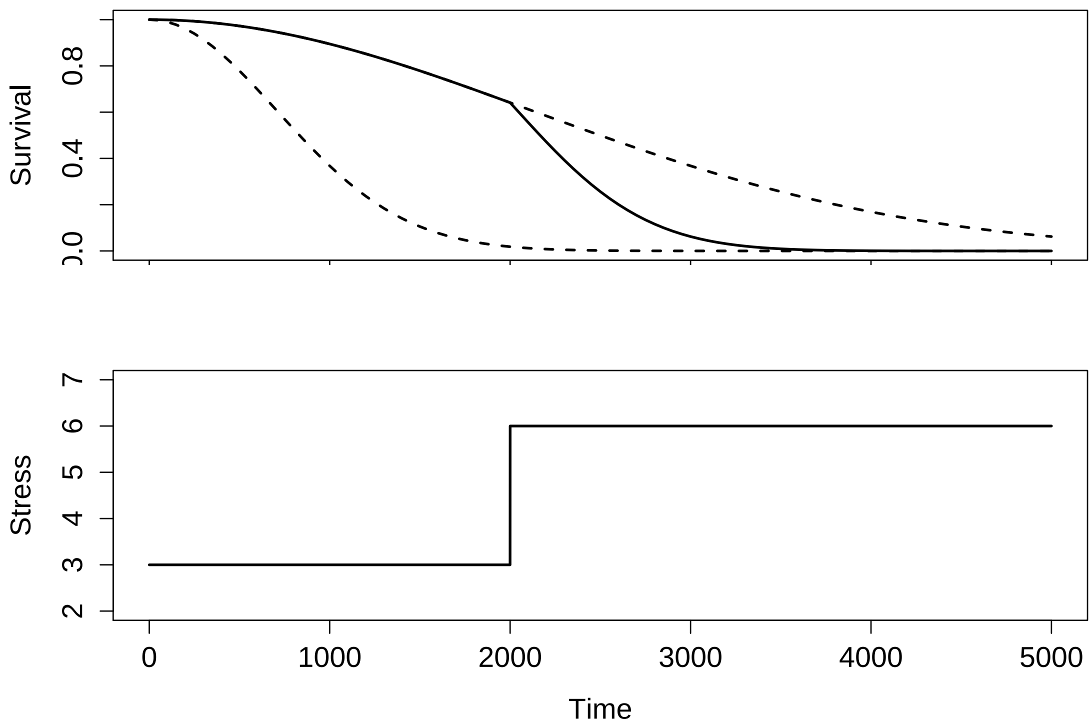

FIGURE 1 – Illustration du principe de dommage cumulé, fonction de survie sous un stress en escalier à un saut connu.

3.2 Résolution pour un stress à un saut aléatoire

Considérons le modèle de survie plus général en supposant que le stress $x(.)$ est un stress à saut aléatoire :

$$x(t) = x_1\mathbf{1}_{t\leq E} + x_2\mathbf{1}_{t>E}$$

où E est une variable aléatoire positive de distribution F_E, et x_0 et x_1 sont les deux valeurs supposées connues du stress avant et après le changement respectivement. Alors, en supposant l'existence d'une densité f_E pour le saut E, la fonction de survie de T s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{x(.)}(t) &= P(T > t) = \int R_{x(.)|E=e}(t)dF(e) = \int R_{x(.)|E=e}(t)f_E(e)de \\ &= R_{x_0}(t)P(E > t) + \int_0^t R_{x_0}\left[AF(x_0, x_1)t - e(AF(x_0, x_1) - 1)\right] f_E(e)de. \end{aligned} \tag{6}$$

Il est évident que, même pour les familles de lois *log-location-scale* comme les lois exponentielles, Weibull ou Log-Normales, la loi *mélangée* $P_{x(.)}$ n'appartient pas à la famille initiale. Ci-dessus est illustré un exemple de calcul de $R_{x(.)}$ pour $R_{x_0} \sim W(3000, 2)$, $AF = 3$, $E \sim W(2000, 4)$.

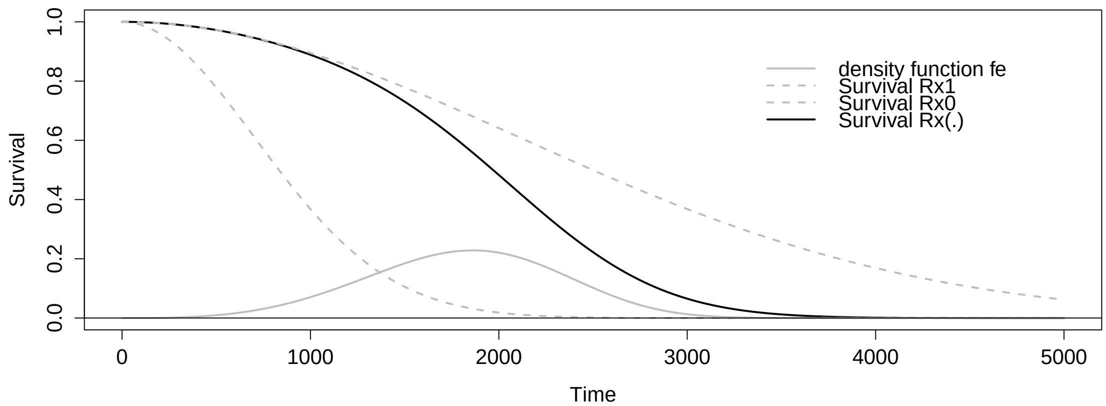

FIGURE 2 – Principe de dommage cumulé sous un stress en escalier à un saut aléatoire

En outre, l'espérance de la loi mélangée peut être obtenue :

$$MTTF_x = \int_{t=0}^{+\infty} R_{x(.)}(t)dt = MTTF_{x_0} - \left(1 - \frac{1}{AF}\right) \int_0^{+\infty} R_{x_0}(t) F_E(t) dt \qquad (7)$$

3.3 Cas d'un stress à un saut avec retour au niveau initial

Considérons un composant dont la loi de durée de vie est accélérée par un stress x(.) de la forme suivante :

$$x(t) = x_0 \mathbf{1}_{0 \le t \le E} + x_1 \mathbf{1}_{E < t \le E + \Delta I} + x_0 \mathbf{1}_{t > E + \Delta I}, \qquad (8)$$

qui modélise le retour à un niveau de stress initial x_0 après une période vécue sous le stress x_1 (par exemple due à la défaillance au temps E d'un composant de contrôle, puis réparé après une durée ΔI). Notons pour simplifier $AF = AF(x_0, x_1)$. Dans ce cas, la fonction de survie et l'espérance de la durée de vie deviennent :

– Conditionnellement à la connaissance de E=e :

$$\begin{aligned} R_{x(.)}(t) &= R_{x_0}(t)\mathbf{1}_{t \le e} + R_{x_0}(AFt - e(AF - 1))\mathbf{1}_{e < t \le e + \Delta I} \\ &\quad + R_{x_0}(t - \Delta I(1 - AF)\mathbf{1}_{t > e + \Delta I}. \qquad (9) \\ MTTF_{x(.)} &= MTTF_{x_0} - \left(1 - \frac{1}{AF}\right) \int_e^{e + AF\Delta I} R_{x_0}(u) du \qquad (10) \end{aligned}$$

– sans conditionner par la connaissance de E :

$$\begin{aligned} R_{x(.)}(t) &= R_{x_0}(t) P(E > t) + R_{x_0}\left(t - \Delta I(1 - AF)\right) P(E < t - \Delta I) \\ &\quad + \int_{t - \Delta I}^{t} R_{x_0}\left(AFt - e(AF - 1)\right) f_E(e) de, \qquad (11) \\ MTTF_{x(.)} &= MTTF_{x_0} - \left(1 - \frac{1}{AF}\right) \int_0^{+\infty} \left(\int_e^{e + AF\Delta I} R_{x_0}(u) du \right) f_E(e) de \end{aligned}$$

On peut noter que (11) peut être facilement encadrée, ce qui permet de mettre en évidence la perte de fiabilité due à la fragilité du composant de régulation (sans connaître la date exacte de perte de régulation) : $R_{x(.)}(t) = R_{x_0}(t) - perte$ où

$$F_E(t-\Delta I)\left[R_{x_0}(t) - R_{x_0}(t + \Delta I(AF-1))\right] \leq perte \leq F_E(t)\left[R_{x_0}(t) - R_{x_0}(t + \Delta I(AF-1))\right].$$

La figure ci-dessous représente le principe de dommage cumulé pour un stress à un saut aléatoire avec retour à une valeur initiale après ΔI.

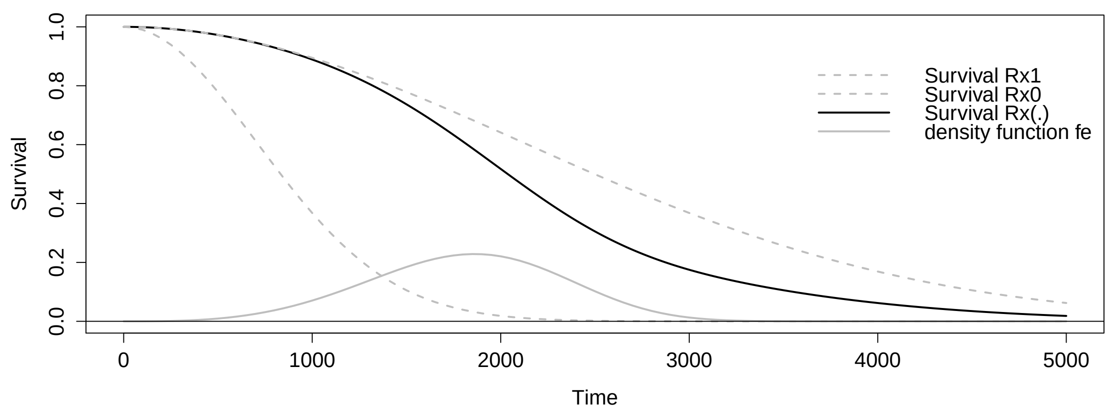

FIGURE 3 – Principe de dommage cumulé sous un stress en escalier à un saut aléatoire avec retour au stress initial après ΔI

La présentation montrera comment ces résultats permettent de quantifier la perte de fiabilité par rapport à une fiabilité prévisionnelle obtenue sous l'hypothèse d'une régulation parfaite du stress, ceci dans le cadre des systèmes réparables dont les maintenances correctives sont périodiques et fixées à l'avance. On pourra aussi montrer comment optimiser le délai entre inspections.

Bibliographie

[1] Asher, H., & Feingold, H. (1984). *Repairable system reliability : Modeling, Inference, Misconceptions and their cause*, Marcel Dekker, New York.

[2] Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (2014), *Statistical methods for reliability data.* John Wiley & Sons.

[3] Lawless, J. F. (2011), *Statistical models and methods for lifetime data.* John Wiley & Sons.

[4] Sedyakin, N. M. (1966). On one physical principle in reliability theory, Techn. Cybernetics, 3, 80-87.

[5] Bagdonavicius, V., & Nikulin, M. (2001), *Accelerated life models : modeling and statistical analysis.* CRC Press.

[6] Nikulin, M., Gerville-Réache, L., & Couallier, V. (2007). *Statistique des essais accélérés*, HERMES : London.