Estimation de modèles GARCH multivariés asymétriques en puissance

Othman KADMIRI [1] & Yacouba BOUBACAR MAÏNASSARA [2] & Bruno SAUSSEREAU [3]

[1] *Université de Franche-Comté et E-mail : othman.kadmiri@univ-fcomte.fr*
[2] *Université de Franche-Comté et E-mail : yacouba.boubacar_mainassara@univ-fcomte.fr*
[3] *Université de Franche-Comté et E-mail : bruno.saussereau@univ-fcomte.fr*

Résumé. Nous étudions les propriétés asymptotiques du quasi-maximum de vraisemblance (QMV) des paramètres d'un modèle GARCH multivarié asymétrique en puissance, lorsque la puissance de la transformation est connue ou doit être estimée. Nous illustrons les résultats par simulations.

Mots-clés. Corrélation conditionnelle constante, GARCH multivarié asymétrique en puissance, modèle à seuil, quasi-maximum de vraisemblance.

Abstract. The asymptotic properties of the quasi-maximum likelihood estimator (QMLE) of multivariate asymmetric power GARCH Models are derived when the power of the transformation is known or is to be estimated. The asymptotic results are illustrated by Monte Carlo experiments.

Keywords. Constant conditional correlation, multivariate asymmetric power GARCH models, quasi-maximum likelihood, threshold models.

1 Introduction

Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) ont été introduits par Engle (1982) et leurs extensions GARCH (ARCH généralisés) est due à Bollerslev (1986). Leurs caractérisations reposent essentiellement sur le concept de variance conditionnelle, qui ne dépend que du module des valeurs passées : l'effet sur la volatilité de la date présente des innovations passées positives et négatives est donc identique. Cette symétrie des modèles GARCH standard est en contradiction avec plusieurs études sur les séries d'action qui mettent en évidence une corrélation négative entre le carré des innovations de la date présente et les innovations passées. Pour pallier ce problème, diverses paramétrisations de la variance conditionnelle ont été proposées. L'une des formulations la plus naturelle est d'introduire l'asymétrie en spécifiant la variance conditionnelle en fonction des composantes positives et négatives des innovations passées. Nous considérons les modèles GARCH asymétriques en puissances ($\delta-$APGARCH ou APGARCH, Asymmetric Power GARCH) proposés par proposé par Hwang et Kim (2004) et définis par

$$\left\{\begin{array}{l}\epsilon_t = \sigma_t\eta_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\left\{\alpha_i^+(\epsilon_{t-i}^+)^\delta + \alpha_i^-(\epsilon_{t-i}^-)^\delta\right\} + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^\delta,\end{array}\right. \tag{1}$$

avec $x^+ = \max(0,x)$ et $x^- = \min(0,x)$ et où δ est une constante strictement positive. Les propriétés asymptotiques des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance (EQMV) et des moindres carrés ordinaires (MCO), du modèle (1) (avec δ connu et/ou inconnu), ont été mis en évidence par Hamadeh et Zakoïan (2011).

Pour les applications économétriques, le cadre univarié est très restrictif. Les séries économiques présentent des interdépendances fortes rendant nécessaire l'étude simultanée de plusieurs séries. Mais, contrairement aux modèles ARMA (autoregressive moving-average), les extensions des modèles GARCH au cadre multivarié ne sont pas directes. Il existe dans la littérature différents types de modèles GARCH multivariés. Dans ce travail, nous proposons une extension du modèle (1) à travers le modèle à corrélation conditionnelle constante proposé par Bollerslev (1988) et étendu par Jeantheau (1998). Posons m le nombre de séries considérées et introduisons les notations suivantes $\underline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_m)'$ avec $\delta_i > 0, \quad \forall i = 1,\ldots,m$ et $X^{\underline{\delta}} = \left(X_1^{\delta_1},\ldots,X_m^{\delta_m}\right)'$. Nous définissons le modèle $\underline{\delta}$-APGARCH(p,q) multivarié à corrélations conditionnelles constantes (CCC-MAPGARCH, multivariate APGARCH) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl}\underline{\varepsilon}_t &= H_t^{1/2}\eta_t \\ H_t &= D_tR_0D_t, \qquad D_t = \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1,t}},\ldots,\sqrt{h_{m,t}}) \\ \underline{h}_t^{\underline{\delta}_0/2} &= \underline{\omega}_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{q}\left\{A_{0i}^+(\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\underline{\delta}_0/2} + A_{0i}^-(\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\underline{\delta}_0/2}\right\} + \sum_{j=1}^{p}B_{0j}\underline{h}_{t-j}^{\underline{\delta}_0/2},\end{array}\right. \tag{2}$$

où $\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}_0$ sont des vecteurs de dimension $m\times 1$ composés de coefficients strictement positifs, les matrices A_{0i}^+, A_{0i}^- et B_{0j} de dimensions $m\times m$ sont à coefficients positifs ou nuls et R_0 est la matrice de corrélation de dimension $m\times m$. Les vecteurs $\underline{\varepsilon}_t^+$ et $\underline{\varepsilon}_t^-$ de dimension m sont

$$\underline{\varepsilon}_t^+ = \left((\varepsilon_{1,t}^+)^2,\ldots,(\varepsilon_{m,t}^+)^2\right)', \qquad \underline{\varepsilon}_t^- = \left((-\varepsilon_{1,t}^-)^2,\ldots,(-\varepsilon_{m,t}^-)^2\right)'.$$

Le processus $(\eta_t)_t$ des innovations est un vecteur de dimension m et vérifie l'hypothèse :

$H0$: (η_t) est une suite de variables indépendante et identiquement distribuée, de matrice variance-covariance identité et d'espérance nulle.

La matrice H_t peut s'interpréter comme étant la variance conditionnelle du processus $(\underline{\varepsilon}_t)$.

En effet, si l'on pose

$$\underline{\varepsilon}_t = D_t\tilde{\eta}_t, \qquad \text{où } \tilde{\eta}_t = (\tilde{\eta}_{1,t}, \ldots, \tilde{\eta}_{m,t}) = R^{1/2}\eta_t$$

alors la variance conditionnelle de

$$\underline{\varepsilon}_t = \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \ldots, \sqrt{h_{m,t}})\tilde{\eta}_t$$

est

$$H_t = \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \ldots, \sqrt{h_{m,t}})R\ \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \ldots, \sqrt{h_{m,t}}).$$

2 Résultats principaux

Avant la phase de l'estimation et de l'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur, il est nécessaire d'étudier l'identifiabilité du modèle, en imposant des contraintes aux matrices A_i^+, A_i^- et B_j pour s'assurer l'unicité des paramètres du modèle. Les hypothèses d'identifiabilité seront effectuées au moment de l'étude de la convergence forte de l'estimateur.

Les paramètres du modèle sont les coefficients des vecteurs $\underline{\omega}$, $\underline{\delta}$, ainsi que les coefficients des matrices A_i^+, A_i^-, B_j et les coefficients de la partie inférieure, hors diagonale, de la matrice de corrélation R, que l'on peut noter ρ_{ij}. Cela représente $2m + m^2(p+2q) + (m(m-1))/2$ paramètres que l'on peut écrire vectoriellement comme suit :

$$\theta = (\underline{\omega}', \mathrm{vec}(A_1^+)', \ldots, \mathrm{vec}(A_p^+)', \mathrm{vec}(A_1^-)', \ldots, \mathrm{vec}(A_p^-)', \mathrm{vec}(B_1)', \ldots, \mathrm{vec}(B_q)', \underline{\delta}', \rho')',$$

où $\rho' = (\rho_{21}, \ldots, \rho_{m1}, \rho_{32}, \ldots, \rho_{m2}, \ldots, \rho_{mm-1})$.
On note Θ l'espace des paramètres

$$\Theta \subset]0, +\infty[^{2m} \times [0,1[^{m^2(2q+p)+1} \times]-1, 1[^{m(m-1)/2}$$

La vraie valeur des paramètres est notée :

$$\theta_0 = (\underline{\omega}_0', \mathrm{vec}(A_{01}^+)', \ldots, \mathrm{vec}(A_{0p}^+)', \mathrm{vec}(A_{01}^-)', \ldots, \mathrm{vec}(A_{0p}^-)', \mathrm{vec}(B_{01})', \ldots, \mathrm{vec}(B_{0q})', \underline{\delta}_0', \rho_0')'.$$

2.1 Stationnarité stricte

Notons

$$\underline{\varepsilon}_t^+ = \Upsilon_t^+\underline{h}_t, \quad \underline{\varepsilon}_t^- = \Upsilon_t^-\underline{h}_t, \qquad \text{où } \Upsilon_t^\circ = diag\{(\tilde{\eta}_{1,t}^\circ)^2, \ldots, (\tilde{\eta}_{m,t}^\circ)^2\}.$$

L'étude de la stationnarité stricte du modèle (2) repose sur la représentation vectorielle suivante

$$\underline{z}_t = C_t\underline{z}_{t-1} + \underline{b}_t,$$

où

$$\underline{z}_t = (\underline{\varepsilon}_t^{+'}, \dots, \underline{\varepsilon}_{t-q+1}^{+'}, \underline{\varepsilon}_t^{-'}, \dots, \underline{\varepsilon}_{t-q+1}^{-'}, \underline{h}_t^{\delta/2'}, \dots, \underline{h}_{t-p+1}^{\delta/2'})',$$
$$\underline{b}_t = (\Upsilon_t^{+}\underline{\omega}_0', 0'_{m(q-1)}, \Upsilon_t^{-}\underline{\omega}_0', 0'_{m(q-1)}, \underline{\omega}_0', 0'_{m(p-1)})'$$

et

$$C_t = \begin{pmatrix} \Upsilon_t^{+} A_{01:q}^{+} & \Upsilon_t^{+} A_{01:q}^{-} & \Upsilon_t^{+} B_{01} : p \\ I_{m(q-1)} & \multicolumn{2}{c}{0_{m(q-1)\times m(p+q+1)}} \\ \Upsilon_t^{-} A_{01:q}^{+} & \Upsilon_t^{-} A_{01:q}^{-} & \Upsilon_t^{-} B_{01} : p \\ 0_{m(q-1)\times mq} & I_{m(q-1)} & 0_{m(q-1)\times m(p-1)} \\ A_{01:q}^{+} & A_{01:q}^{-} & B_{01:p} \\ \multicolumn{2}{c}{0_{m(p+q+1)\times m(q-1)}} & I_{m(p-1)} \end{pmatrix}.$$

Pour énoncer le théorème suivant de la stationnarité stricte du modèle (2), nous aurons besoin de la notion de plus grand coefficient de Lyapounov définie par

$$\gamma(C_0) := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}(\log \|C_t C_{t-1} \dots C_1\|).$$

Théorème 1 (Stationnarité stricte)
Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et non anticipative du modèle CCC-MAPGARCH(p, q) est $\gamma(C_0) < 0$. Sous cette condition, la solution est stationnaire et non anticipative, est ergodique et unique.

2.2 Définition de l'estimateur du QMV

On suppose que les observations $\underline{\varepsilon}_t = (\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n)$ constituent une réalisation d'un processus CCC-MAPTGARCH(p, q) de taille n, qui est l'unique solution strictement stationnaire non anticipative du modèle (2). Conditionnellement à certaines valeurs initiales, $\underline{\varepsilon}_{t-q}, \dots, \underline{\varepsilon}_0, \underline{h}_{t-p}, \dots, \underline{h}_0 \geq 0$, la quasi-vraisemblance gaussienne s'écrit :

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; \underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\tilde{H}_t|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{\varepsilon}_t'\tilde{H}_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\right),$$

où les $\tilde{H}_t$ sont définis récurssivement, pour $t \geq 1$, par

$$\begin{cases} \tilde{H}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, \qquad \tilde{D}_t = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{m,t}}\right) \\ \underline{\tilde{h}_t} := \underline{\tilde{h}_t}(\theta) = \left(\underline{\omega} + \sum_{i=1}^{q} A_i^{+}(\underline{\varepsilon}_{t-i}^{+})^{\underline{\delta}/2} + A_i^{-}(\underline{\varepsilon}_{t-i}^{-})^{\underline{\delta}/2} + \sum_{j=1}^{p} B_j \underline{\tilde{h}}_{t-j}^{\underline{\delta}/2}\right)^{2/\underline{\delta}}. \end{cases}$$

Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta) = \arg\min_{\theta\in\Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta),$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \tilde{l}_t, \qquad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\theta) = \log(|\tilde{H}_t|) + \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t.$$

2.3 Propriétés asymptotiques de l'estimateur du QMV

On note $\mathcal{A}_{\theta_0}^{+}(z) = \sum_{i=1}^{q} A_i^{+} z^i, \mathcal{A}_{\theta_0}^{-}(z) = \sum_{i=1}^{q} A_i^{-} z^i$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z) = I_m - \sum_{j=1}^{p} B_j z^j$.

2.3.1 Consistance de l'estimateur du QMV

Pour montrer la consistance de l'estimateur, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

$H1$: $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est compact,
$H2$: $\gamma(C_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta, \det(\mathcal{B}(z)) = 0 \Rightarrow |z| > 1$,
$H3$: Les composantes de η_t sont indépendantes et les lois de leurs carrés sont non dégénérées.
$H4$: si $p > 0, \mathcal{A}_{\theta_0}^{+}(1) + \mathcal{A}_{\theta_0}^{-}(1) \neq 0, \mathcal{A}_{\theta_0}^{+}(z), \mathcal{A}_{\theta_0}^{-}(z)$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ sont coprimes à gauche et la matrice $M(\mathcal{A}_{\theta_0}^{+}, \mathcal{A}_{\theta_0}^{-}, \mathcal{B}_{\theta_0})$ est de plein rang m.
$H5$: R est une matrice de corrélation définie positive pour tout $\theta \in \Theta$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence forte suivant.

Théorème 2 (Convergence forte)
Soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs du QMV satisfaisant le modèle défini en (2). *Sous les hypothèses $H1$–$H5$, on a*

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta_0, \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

2.3.2 Normalité asymptotique de l'estimateur du QMV

Pour la normalité asymptotique l'EQMV, nous ferons les hypothèses supplémentaires suivantes
$H6$: $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, où $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur de Θ.
$H7$: $\mathbb{E}\|\eta_t \eta_t'\|^2 < \infty$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant qui nous donne le comportement asymptotique de l'EQMV.

Théorème 3 (Normalité asymptotique)

Sous les hypothèses du théorème 2, ainsi que les hypothèses complémentaires $H6$ et $H7$, nous avons

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive donnée par

$$I := I(\theta_0) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta'}\right], \qquad J := J(\theta_0) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'}\right].$$

Bibliographie

[1] Bollerslev, T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, 307-327.
[2] Bollerslev, T. (1988), A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances, The Review of Economics and Statistics, 96, 116-131.
[3] Engle, R. F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedaticity with Estimate of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, 50, 987-1008.
[4] Francq, C. et Zakoïan J-M. (2012), QML estimation of a class of multivariate asymetric GARCH models, Econometric theory, 28, 179-206.
[5] Hamadeh, T. et Zakoïan, J-M. (2011), Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear GARCH processes, Journal of Statistical Planning and Inference, 141, 488-507.
[6] Hwang, S.Y. et Kim, T.Y. (2004), Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with applications to test dor ARCH structure, Stochastic Processes and Their Applications, 110, 295-314.
[7] Jeantheau, T. (1998), Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models, Econometric Theory, 70-86.