Caractérisation des familles exponentielles naturelles par la fonction de variance généralisée

Johann Cuenin [1] & Bruno Saussereau [2]

[1] *Laboratoire de Mathématiques de Besançon - UMR 6623 CNRS-UFC, 16 route de Gray 25030 Besançon Cedex ; mail : johann.cuenin@univ-fcomte.fr*
[2] *Laboratoire de Mathématiques de Besançon - UMR 6623 CNRS-UFC, 16 route de Gray 25030 Besançon Cedex ; mail : bruno.saussereau@univ-fcomte.fr*

Résumé. On donne la caractérisation des familles exponentielles naturelles, engendrées par une distribution infiniment divisible, par leur mesure de Lévy modifiée. Ceci mène à leur caractérisation par leur fonction de variance généralisée, définie comme le déterminant de la fonction de variance. On obtient ce résultat en utilisant un principe du maximum permettant de prouver l'unicité de solutions de problèmes de Monge-Ampère particuliers.

Mots-clés. Mesure de Lévy modifiée, équation de Monge-Ampère, principe du maximum.

Abstract. The natural exponential families generated by an infinitely divisible distribution are characterized by the modified Lévy measure which leads to the characterization by the generalized variance function. The result is obtained by using maximum principle to prove the uniqueness of a solution in particular Monge-Ampère problems.

Keywords. Modified Lévy measure, Monge-Ampère equation, maximum principle.

1 Introduction

Il est bien connu que la matrice de variance-covariance représente une mesure de dispersion dans le cadre d'études multivariées. La variance généralisée, définie comme le déterminant de cette dernière, en est une autre. Introduite par Wilks (1932) dans un cadre gaussien, elle est depuis, bien présente dans la littérature. Par exemple, Jafari (2012) a proposé une inférence sur le quotient de deux variances généralisées émanant de deux populations gaussiennes indépendantes, puis dépendantes. Alfaro et Ortega (2012) l'ont employée pour détecter des observations hors-contrôle en qualité dans un cadre non gaussien. Quant à Arvanitis et Afonja (1971), ils ont mis en évidence son importance dans la théorie des sondages stratifiés.

Partant du fait que la fonction de variance (i.e. l'écriture de la matrice de variance-covariance en fonction de la moyenne) caractérise complètement certaines familles de lois de probabilité, appelées familles exponentielles naturelles (FENs), nous montrons que la fonction de variance généralisée caractérise également, sous certaines conditions, les FENs. Pour arriver à ce résultat nous établissons, dans un premier temps, une caractérisation des FENs par la mesure de Lévy modifiée (voir plus bas pour la définition). Il est à noter que notre résultat généralise certains cas particuliers traîtés par Kokonendji et Masmoudi (2006) et plus récemment par Ghribi et Masmoudi (2010) et Kokonendji et Masmoudi (2013).

2 Résultats

Nous commençons par donner un rappel rapide du cadre des FENs. Nous donnons ensuite la définition de la mesure de Lévy modifiée ainsi que son rôle dans la caractérisation des FENs. Enfin le résultat de caractérisation par la fonction de variance généralisée est énoncé. On se placera toujours dans le cas où les FENs sont générées par des mesures infiniment divisibles. Cette hypothèse, non restrictive en terme d'application (les familles infiniment divisibles regroupant beaucoup de lois de probabilité bien connues), permet de s'appuyer sur un résultat central proposé par Hassairi (1999).

2.1 Familles exponentielles naturelles et mesure de Lévy modifiée

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ où $\mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ est l'ensemble des mesures positives σ-finies définies sur les boréliens de $\mathbb{R}^k$, non concentrées sur un hyperplan. Notons $L_\mu(\theta) := \int_{\mathbb{R}^k} \exp(\theta^\top x)\mu(\mathrm{d}x)$ la transformée de Laplace de μ. Pour $\theta \in \Theta_\mu = \mathrm{int}\{\theta \in \mathbb{R}^k,\ L_\mu(\theta) < +\infty\}$, on définit la fonction génératrice des cumulants de μ par $\kappa_\mu(\theta) = \ln L_\mu(\theta)$.

Définition 2.1 *Une FEN* $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$ *engendrée par* $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ *est l'ensemble des lois de probabilité de la forme*

$$P(\theta, \mu)(\mathrm{d}x) = \exp[\theta^\top x - \kappa_\mu(\theta)]\mu(\mathrm{d}x),$$

avec $\theta \in \Theta_\mu$.

Pour tout $\theta \in \Theta_\mu$, l'espérance de $P(\theta, \mu)$ est donnée par le gradient $\nabla\kappa_\mu(\theta)$ et sa matrice de variance-covariance par la hessienne $\nabla^2\kappa_\mu(\theta)$. L'application $\tau_\mu : \theta \mapsto \nabla\kappa_\mu(\theta)$ est alors une bijection de Θ_μ dans $\mathrm{M_F} = \nabla\kappa_\mu(\Theta_\mu)$ dont l'inverse est notée par ψ_μ. Ainsi $m = \tau_\mu(\theta)$ est une autre paramétrisation de la FEN $\mathrm{F} = \{P(m, \mathrm{F}),\ m \in \mathrm{M_F}\}$ que l'on appelle paramétrisation par la moyenne. Dès lors, on peut écrire la matrice de variance-covariance de $P(m, \mathrm{F})$ comme une fonction de m, c'est-à-dire $V_\mathrm{F} : m \in \mathrm{M_F} \mapsto V_\mathrm{F}(m) := \nabla^2\kappa_\mu(\psi_\mu(m))$. On appelle cette dernière fonction de variance de la FEN F. En prenant son déterminant, on définit alors la fonction de variance généralisée de F.

Le théorème suivant, énoncé par Hassairi (1999), permet de définir la mesure de Lévy modifiée associée à une FEN.

Théorème 2.1 (Hassairi, 1999) *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ une loi de probabilité infiniment divisible engendrant une FEN* $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$. *Il existe alors une mesure positive $\rho(\mu)$ définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^k$ telle que*

$$\det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = L_{\rho(\mu)}(\theta), \text{ pour tout } \theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)}.$$

La mesure $\rho(\mu)$ est alors appelée mesure de Lévy modifiée associée à μ.

2.2 Caractérisations des familles exponentielles naturelles

Dans le Théorème 2.1, il y a un parallèle à faire entre l'égalité $\det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = L_{\rho(\mu)}(\theta)$, pour tout $\theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)}$, et une équation de Monge-Ampère particulière de la forme

$$\det \nabla^2 u = f,$$

où l'inconnue u est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et f est une fonction positive donnée, définie sur un domaine convexe borné Ω. On pourra se référer à Gutiérrez (2001) pour plus de détails sur ce type d'équations. Notre résultat de caractérisation est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Soit μ une mesure σ-finie de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$, infiniment divisible et engendrant une FEN* $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$. *Alors la mesure de Lévy modifiée associée à μ caractérise* F.

La preuve se base sur le fait que, comme μ est supposée infiniment divisible, le Théorème 2.1 d'Hassairi s'applique. Connaissant la mesure de Lévy modifiée, on peut alors poser le problème de Monge-Ampère suivant

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(\theta) = L_{\rho(\mu)}(\theta) \ \forall \theta \in \Theta_\mu \\ \lim_{\|\theta\| \to \infty, \text{ et } \theta \in \Theta_\mu} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1 \\ \lim_{d(\theta, \partial\Theta_\mu) \to 0} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1, \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0 = \kappa_\mu$ est une solution particulière. Le lemme suivant, dû à Caffarelli et al. (1985), donne le principe du maximum pour les équation elliptiques de second ordre, dont l'équation de Monge-Ampère est un cas particulier.

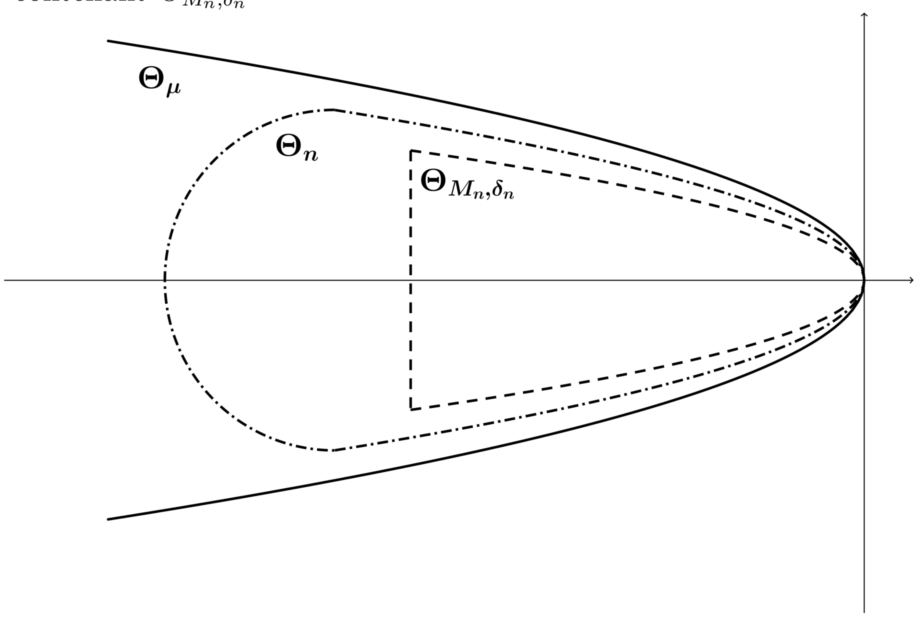
Lemme 2.1 (Caffarelli et al., 1985) *Soit Ω un domaine borné, convexe et régulier de $\mathbb{R}^k$. Supposons que pour tout $x \in \Omega$,* $\det \nabla^2 v(x) < f(x)$ *où f est une fonction positive et où u satisfait* $\det \nabla^2 u(x) = f(x)$. *Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ sur Ω.*

On se donne alors une autre solution u du problème (1). D'après les conditions aux limites, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$\underline{u}_n(\theta) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u(\theta) \leq u_0(\theta) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u(\theta) = \overline{u}_n(\theta). \tag{2}$$

est vraie en dehors d'un certain domaine Θ_{M_n,δ_n} (voir la Figure 1 pour une illustration en 2 dimensions). Cette inégalité reste donc vraie sur la frontière d'un ensemble suffisamment lisse Θ_n contenant Θ_{M_n,δ_n} et inclus dans Θ_μ. Comme $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$ sont respectivement des sous-solutions et sur-solutions de (1), par le Lemme 2.1, l'inégalité (2) est également vraie à l'intérieur de Θ_n. En passant à la limite, Θ_{M_n,δ_n} tend vers Θ_μ et nous avons $u = u_0$ grâce à l'inégalité (2).

FIGURE 1 – Domaines Θ_μ (ligne pleine), Θ_{M_n,δ_n} (pointillés) et le domaine lisse Θ_n inclus dans Θ_μ et contenant Θ_{M_n,δ_n}



La caractérisation par la fonction de variance généralisée d'une FEN est alors une simple conséquence du Théorème 2.2.

Corollaire 2.1 *Soit μ une mesure σ-finie de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$, infiniment divisible et engendrant une FEN* $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$*. Alors la fonction de variance généralisée* $m \in \mathrm{M_F} \mapsto \det V_{\mathrm{F}}(m)$ *caractérise* F.

La preuve de ce corollaire est une simple adaptation de celle du Théorème 2.2 en considérant la paramétrisation par la moyenne.

Bibliographie

[1] Alfaro, J. et Ortega, J. (2012), Robust Hotelling's T2 control charts under nonnormality : the case of t-Student distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82, 1437–1447.

[2] Arvanitis, L. G. et Afonja, B. (1971), Use of the generalized variance and the gradient projection method in multivariate stratified sampling, *Biometrics*, 27, 119–127.
[3] Caffarelli, L. et Nirenberg, L. et Spruck, J. (1985), UThe Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III : Functions of the eigenvalues of the Hessian, *Acta Mathematica*, 155, 261–301.
[4] Ghribi, A. et Masmoudi, A. (2010), Characterization of multinomial exponential families by generalized variance, *Statistics and Probability Letters*, 80, 939–944.
[5] Gutiérrez, C. E. (2001), *The Monge-Ampère Equation*, Birkhäuser, Boston.
[6] Hassairi, A. (1999), Generalized variance and exponential families, *The Annals of Statistics*, 27, 374–385.
[7] Jafari, A. A. (2012), Inferences on the ratio of two generalized variances : independent and correlated cases, *Statistical Methods and Applications*, 21, 297–314.
[8] Kokonendji, C. C. et Masmoudi, A. (2013), On the Monge-Ampère equation for characterizing gamma-Gaussian model, *Statistics and Probability Letters*, 83, 1692–1698.
[9] Kokonendji, C. C. et Masmoudi, A. (2006), A characterization of Poisson–Gaussian families by generalized variance, *Bernoulli*, 12, 371–379.
[10] Wilks, S. S. (1932), Certain generalizations in the analysis of variance, *Bernoulli*, 24, 471–494.