# Processus de Hawkes localement stationnaires

Laure Sansonnet [1], François Roueff [2] & Rainer von Sachs [3]

[1] *UMR MIA-Paris, AgroParisTech, INRA, Université Paris-Saclay*
`laure.sansonnet@agroparistech.fr`
[2] *LTCI, CNRS, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay*
`roueff@telecom-paristech.fr`
[3] *ISBA, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique*
`rvs@uclouvain.be`

**Résumé.** Le but de cet exposé est de proposer une généralisation des processus de Hawkes stationnaires pour permettre une analyse temporelle au second ordre. En s'inspirant des concepts des processus autorégressifs localement stationnaires, nous appliquons les différentes techniques usuelles pour décrire la dynamique à variations temporelles des processus ponctuels auto-excitants. En particulier, nous obtenons une approximation stationnaire de la fonctionnelle de Laplace d'un processus de Hawkes localement stationnaire. Cela nous permet de définir une densité moyenne locale et un spectre de Bartlett local qui peuvent être utilisés pour approcher les moments du premier et second ordre du processus. Nous proposons également une illustration de ces résultats théoriques avec une étude pertinente par simulations et nous donnons des perspectives pour estimer le spectre de Bartlett d'un processus de Hawkes localement stationnaire. Une partie de ce travail est publiée dans Stochastic Processes and their Applications, 2015.

**Mots-clés.** Processus localement stationnaires, Processus de Hawkes, Spectre de Bartlett, Analyse temps fréquence, Processus ponctuels

**Abstract.** This presentation addresses the generalization of stationary Hawkes processes in order to allow for a time-evolving second-order analysis. Motivated by the concept of locally stationary autoregressive processes, we apply however inherently different techniques to describe the time-varying dynamics of self-exciting point processes. In particular we derive a stationary approximation of the Laplace functional of a locally stationary Hawkes process. This allows us to define a local mean density function and a local Bartlett spectrum which can be used to compute approximations of first and second order moments of the process. We complete the presentation by some insightful simulation studies and some perspectives for estimating the Bartlett spectrum of a locally stationary Hawkes process. A part of this work is published in Stochastic Processes and their Applications, 2015.

**Keywords.** Locally stationary processes, Hawkes processes, Bartlett spectrum, Time-frequency analysis, Point processes

# 1 Introduction

Les processus de Hawkes ont été introduits par Hawkes (1971) avec en particulier des applications à la sismologie (voir Ogata (1988)). L'étude des processus de Hawkes fait le postulat de la stationnarité des fonctions d'interaction sous-jacentes. Par exemple, dans le cas d'un modèle de Hawkes univarié (processus linéaire auto-excitant) d'intensité conditionnellement au passé

$$\lambda(t) = \nu + \int_{-\infty}^{t^-} p(t-s)\, N(\mathrm{d}s) = \nu + \sum_{t_i<t} p(t-t_i),$$

avec les points du processus $N$ notés $t_i$, on suppose que la fonction de fertilité $p$ est la même tout au long de l'intervalle d'observation, autrement dit elle ne dépend pas de la position temporelle du processus. Or, en pratique, cette hypothèse n'est pas raisonnable (ou sur un intervalle de temps très court). C'est pourquoi, de nombreux systèmes physiques ou biologiques sont modélisés par des processus localement stationnaires, où des fluctuations aléatoires sont produites par un mécanisme qui varie doucement dans le temps. De tels processus peuvent être approchés localement par des processus stationnaires. Le processus résultant est alors localement stationnaire sur des intervalles de temps de tailles variables. On pourra par exemple se référer à l'article de Dahlhaus (2000) pour l'étude théorique de ces processus.

Nous proposons dans cet exposé de définir un processus de Hawkes localement stationnaire (dans le cas univarié et spatial) en ayant recours à la définition par clusters du processus de Hawkes non-stationnaire, son intensité locale ainsi que son spectre de Bartlett local.

# 2 Définitions et résultats théoriques

## 2.1 Définitions

À partir de la définition des processus de Hawkes vus comme des processus de clusters (voir Daley and Vere-Jones (2003)), nous donnons les définitions suivantes pour le processus de Hawkes dans ses versions non-stationnaire et localement stationnaire.

**Définition 1.** On dit qu'un processus de Hawkes est non-stationnaire lorsque la fonction d'intensité des immigrants $\lambda_c$ et la fonction de fertilité $p(\cdot;\cdot)$ peuvent dépendre du temps. Si

$$\zeta_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^\ell} \int p(r;t)\,\mathrm{d}r < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_c|_\infty < \infty,$$

alors le processus admet une densité qui est uniformément bornée par $|\lambda_c|_\infty/(1-\zeta_1)$.

Nous souhaitons alors définir un modèle de processus ponctuel qui peut localement être interprété comme un processus de Hawkes stationnaire, dans le même esprit que les processus autorégressifs localement stationnaires en séries temporelles (voir Dahlhaus (1996)).

**Définition 2.** Un processus de Hawkes localement stationnaire ayant pour intensité locale des immigrants $\lambda_c^{<\mathrm{LS}>}$ et pour fonction de fertilité locale $p^{<\mathrm{LS}>}(\cdot;\cdot)$ est une collection $(N_T)_{T>0}$ de processus de Hawkes non-stationnaires d'intensité des immigrants et de fonction de fertilité données respectivement par $\lambda_{cT}(t^c) = \lambda_c^{<\mathrm{LS}>}(t^c/T)$ pour tout $t^c \in \mathbb{R}^\ell$ et par $p_T(\cdot;t) = p^{<\mathrm{LS}>}(\cdot;t/T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\ell$.

Comme pour la Définition 1 et pour avoir les propriétés équivalentes pour la densité, nous faisons l'hypothèse suivante :

**(LS-1)** On a :

$$\zeta_1^{<\mathrm{LS}>} = \sup_{u \in \mathbb{R}^\ell} \int p^{<\mathrm{LS}>}(r;u)\,\mathrm{d}r < 1 \quad \text{and} \quad |\lambda_c^{<\mathrm{LS}>}|_\infty < \infty.$$

## 2.2 Résultats principaux

**Approximation locale de la fonctionnelle de la log-Laplace.** Un outil important pour des applications en statistique est d'avoir une approximation locale de $N_T$ lorsque $T \to \infty$. Afin de préciser la notion de locale ici, nous nous donnons une position absolue $u \in \mathbb{R}^\ell$. Alors, le processus $N_T$ translaté à la position réelle $Tu$, noté $N_T \circ S^{-Tu}$ suit approximativement la loi d'un processus de Hawkes stationnaire $N(\cdot;u)$ d'intensité des immigrants $\lambda^{<\mathrm{S}>} = \lambda_c^{<\mathrm{LS}>}(u)$ et de fonction de fertilité $p^{<\mathrm{S}>} = p^{<\mathrm{LS}>}(\cdot;u)$.

Nous étudions les approximations locales de la loi du processus de Hawkes localement stationnaire $(N_T)_{T>0}$ en utilisant la fonctionnelle de Laplace qui est un outil efficace pour décrire les lois des processus ponctuels. Sous des hypothèses de régularité classiques notées (LS-2), (LS-3) et (LS-3) sur l'intensité des immigrants et la fonction de fertilité (voir Roueff *et al.* (2015) pour plus de détails), nous montrons que pour $T$ grand, la fonctionnelle de Laplace du processus $N_T \circ S^{-Tu}$ peut être approchée par celle du processus de Hawkes stationnaire $N(\cdot;u)$, à la vitesse de convergence $T^{-\beta}$, avec $\beta \in (0;1]$.

**Approximation locale des cumulants.** Puisque les cumulants de tout ordre peuvent s'obtenir à partir de la fonctionnelle de la log-Laplace, nous pouvons également montrer que pour $T$ grand, les cumulants du processus $N_T \circ S^{-Tu}$ peuvent être approchés par ceux du processus de Hawkes stationnaire $N(\cdot;u)$, sous les hypothèses (LS-1:4).

**Densité moyenne locale.** Pour le cumulant d'ordre 1, nous obtenons un résultat plus précis donné dans le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Soit $\beta \in (0,1]$. Sous les hypothèses (LS-1:4), pour tout $T$, $N_T$ admet une fonction de densité $m_{1T}$ satisfaisant*

$$|m_{1T}|_\infty \leq \frac{|\lambda_c^{<LS>}|_\infty}{\ell - \zeta_1^{<LS>}}.$$

*De plus, nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^\ell$, $T > 0$ et $b > 0$,*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \,:\, |t-Tu| \leq b} |m_{1T}(t) - m_1^{<LS>}(u)| \leq C_1 \,\left(C_2 + b^\beta\right)\, T^{-\beta},$$

*où*

$$m_1^{<LS>}(u) = \frac{\lambda_c^{<LS>}(u)}{1 - \int p^{<LS>}(\cdot; u)}.$$

# 3 Analyse temps fréquence des processus ponctuels

L'un des bénéfices des séries temporelles localement stationnaires est de fournir un cadre statistique non-paramétrique pour l'analyse en temps fréquence des séries temporelles. Nous les étendons ici au cas des processus localement stationnaires.

## 3.1 Spectre de Bartlett local

Le spectre de Bartlett $\Gamma$ d'un processus ponctuel $N$ stationnaire au second ordre sur $\mathbb{R}$ est défini comme l'unique mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout fonction $f$ bornée et à support compact,

$$\mathrm{Var}\big(N(f)\big) = \Gamma(|\hat{f}|^2) = \int \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \, \Gamma(\mathrm{d}\omega) \,,$$

avec $\hat{f}$ la transformation de Fourier de $f$. Pour les processus de Hawkes stationnaires d'intensité des immigrants $\lambda_c$ et de fonction de fertilité $p$, le spectre de Bartlett admet la densité suivante

$$\Gamma(\mathrm{d}\omega) = \frac{\lambda_c}{2\pi(1 - \int p)} \, |1 - \hat{p}(\omega)|^{-2} \, \mathrm{d}\omega.$$

Sous l'hypothèse (LS-1), en appliquant ce résultat au processus de Hawkes stationnaire $N(\cdot; u)$, nous avons, pour tout fonction $f$ bornée et à support compact,

$$\mathrm{Var}\big(N(f;u)\big) = \Gamma^{<\mathrm{LS}>}\left(|\hat{f}|^2; u\right) \,,$$

où

$$\Gamma^{<\mathrm{LS}>}(\mathrm{d}\omega; u) = \frac{\lambda_c^{<\mathrm{LS}>}(u)}{2\pi(1 - \int p^{<\mathrm{LS}>}(\cdot; u))} \, |1 - \hat{p}^{<\mathrm{LS}>}(\omega; u)|^{-2} \, \mathrm{d}\omega \,,$$

avec

$$\hat{p}^{<\mathrm{LS}>}(\omega; u) = \int p^{<\mathrm{LS}>}(t; u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\, \mathrm{d}t\ .$$

Nous appelons $\Gamma^{<\mathrm{LS}>}(\cdot; u)$ le spectre de Bartlett local à la position absolue $u$. On obtient le résultat suivant qui dit que, bien que $N_T$ ne soit pas stationnaire, pour $T$ suffisamment grand, sa variance au voisinage de $Tu$ peut être approchée en utilisant le spectre de Bartlett local à la position absolue $u$.

**Théorème 2.** *Soit $\beta \in (0, 1]$. Sous les hypothèses (LS-1:4), pour tout $u \in \mathbb{R}$, $T > 0$ et pour toute fonction $f$ bornée à support dans $[-b, b]$ pour $b > 0$, nous avons*

$$\left|\mathrm{Var}\left(N_T(S^{-Tu} f)\right) - \Gamma^{<LS>}(|\hat{f}|^2; u)\right| \leq \frac{8\, C_1\, (b^\beta + C_2)}{-\log \zeta_1^{<LS>}}\ |f|_1\ (|f|_\infty + C_0\, |f|_1)\ T^{-\beta}.$$

## 3.2 Estimation à noyau du spectre de Bartlett local

Nous construisons un estimateur de $\mathbb{E}[m(N(f; u_0))]$ basé sur les observations empiriques de $N_T$ et défini par

$$\begin{aligned}\widehat{E}[m\left(N_T(S^{-Tu_0} f)\right); W_{b_1}] &:= \frac{1}{T} \int m\left(N_T(f(\cdot - t - Tu_0))\right)\ W_{b_1}(t/T)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T} \int m \left( \sum_k f(t_{k,T} - t - Tu_0) \right)\ W_{b_1}(t/T)\, \mathrm{d}t\ ,\end{aligned}$$

où $m$ est une fonction de moment, les $t_{k,T}$ sont les points du processus $N_T$ observés sur $[0; T]$ et $W_{b_1}$ est une fonction de poids en temps absolu $u$: $u \mapsto W_{b_1}(u) = b_1^{-1} W(u/b_1)$ pour une fonction à noyau $W$ fixée.

Nous proposons alors un estimateur du spectre de Bartlett local défini par

$$\widehat{\gamma}_{b_2,b_1}(\omega_0; u_0) = \widehat{E}\left(|N_T(S^{-Tu_0} K_{b_2,\omega_0})|^2; W_{b_1}\right) - \left|\widehat{E}\left(N_T(S^{-Tu_0} K_{b_2,\omega_0}); W_{b_1}\right)\right|^2,$$

où $K_{b_2,\omega_0}(t) = b_2^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} K(b_2 t)$, avec $K$ une fonction à noyau fixée. Il s'agit en effet d'un estimateur naturel de $\mathrm{Var}\left(N_T(S^{-Tu_0} K_{b_2,\omega_0})\right)$.

# 4 Simulations et perspectives

Les performances d'un point de vue algorithmique de l'estimateur à noyau du spectre de Bartlett local proposé ci-dessus seront illustrées avec des simulations de processus de Hawkes localement stationnaires (obtenues avec l'algorithme de thinning modifié d'Ogata (1981)) en s'appuyant sur des intensités d'immigrants $\lambda_c$ constantes et des fonctions de fertilité $p$ dérivant de loi Gamma (voir Roueff *et al.* (2015) pour plus de détails).

Puis, nous discuterons les performances théoriques de cet estimateur, avec en particulier les contrôles fins de son espérance et sa variance.

# Bibliographie

[1] Dahlhaus, R. (1996), On the Kullback-Leibler information divergence of locally stationary processes, *Stochastic Processes and their Applications*, 62, 139–168.
[2] Dahlhaus, R. (2000), A likelihood approximation for locally stationary processes, *The Annals of Statistics*, 28, 1762–1794.
[3] Daley, D. and Vere-Jones, D. (2003), An Introduction to the theory of point processes - Volume I: Elementary theory and methods, *Probability and Its Applications, Springer*.
[4] Hawkes, A. (1971), Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes, *Biometrika*, 58, 83–90.
[5] Ogata, Y. (1981) On Lewis' simulation method for point processes, *Information Theory, IEEE Transactions*, 27, 23–31.
[6] Ogata, Y. (1988), Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes, *Journal of the American Statistical Association*, 83, 9–27.
[7] Roueff, F., von Sachs, R. and Sansonnet, L. (2015), Locally stationary Hawkes processes, *Stochastic Processes and their Applications*,
http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2015.12.003.