

LES LOIS DE L'IMAGERIE COHÉRENTE ET LEUR FORMALISME SOUS FORME DE FONCTIONS DE MEIJER

Jean-Marie Nicolas & Florence Tupin

*LTCI, CNRS, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay
46 rue Barrault, 75634, Paris Cedex 13, France*

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

florence.tupin@telecom-paristech.fr

Résumé. L'imagerie cohérente est caractérisée par des modèles de texture et de bruit opérant dans un cadre multiplicatif. Aussi l'approche des log-statistiques (ou statistiques de Mellin) permet de les aborder de manière plus efficace que les statistiques classiques, surtout dans le cadre des lois de texture à queue lourde. Nous proposons ici de réécrire les lois sous forme de fonctions de Meijer. Il est alors possible d'en déterminer les fonctions de répartition, ce qui ouvre de nouvelles perspectives dans la simulation de ces lois.

Mots-clés. Statistiques de Mellin, fonctions de Meijer, fonction de répartition, imagerie cohérente

Abstract. Coherent imaging is based on texture models and noise models acting multiplicatively. It is why log-statistics (called also Mellin statistics) are well matching with these image distributions, more precisely with heavy tailed ones. We propose in this article to rewrite these distributions with the help of Meijer functions. By this way, cumulative functions can easily be derived, allowing simulations easy to implement

Keywords. Mellin statistics, Meijer functions, cumulative function, coherent imaging

1 Les lois en imagerie cohérente et leurs modélisations

Les fonctions de base

Les systèmes d'imagerie cohérente (ultrasons, radar, laser. . .) ont comme caractéristique principale d'avoir leurs données soumises au phénomène de chatoisement (*speckle*) qui agit comme un bruit multiplicatif. Ce phénomène a été modélisé par Goodman qui a montré que le chatoisement "pleinement développé" vérifie une loi Gamma si les données sont en intensité et une loi de Rayleigh si les données sont en amplitude [4] (2009). Ce chatoisement peut être éventuellement modifié par des traitements appelés "multivues" de sorte que ce bruit observé sur les images vérifie en pratique la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ pour les données en intensité et la loi de Nakagami $\mathcal{RN}[\mu, L](x)$ pour les données en amplitude :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}}, \quad \mathcal{RN}[\mu, L](x) = \frac{2}{\Gamma(L)} \frac{\sqrt{L}}{\mu} \left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^{2L-1} e^{-\left(\frac{\sqrt{L}x}{\mu} \right)^2}$$

Ces deux lois s’observent dans des cas très particuliers correspondant à des images sans texture, c’est à dire des données acquises sur des zones parfaitement homogènes à l’échelle du pixel (la variabilité au niveau de la longueur d’onde donnant naissance au phénomène de chatoiement). Leur allure est bien connue, et on peut remarquer que les deux paramètres sont assimilables à un facteur d’échelle (μ) et à un facteur de forme (L).

En présence de zones hétérogènes, la texture n’est plus uniforme et les données résultantes peuvent se concevoir comme le résultat d’un bruit multiplicatif (le chatoiement) agissant sur les données acquises avec une texture donnée.

L’approche des statistiques de Mellin

Une caractéristique essentielle de ces données est le fait qu’amplitude et intensité sont définies uniquement sur \mathbb{R}^+ . Aussi on peut quitter le cadre des statistiques traditionnelles –qui définissent la fonction caractéristique comme une transformée de Fourier définie sur \mathbb{R} –, et choisir l’approche des “statistiques de Mellin” (appelées aussi log-statistiques) [8] (2002) et qui définissent la fonction caractéristique dite de seconde espèce comme une transformée de Mellin (définie sur \mathbb{R}^+).

Pour une densité de probabilité $p(x)$ on a ainsi sa fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_p(s) = \mathcal{M}[p(x)](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} p(x) dx,$$

par dérivation de cette dernière, ses “log-moments” \tilde{m}_n qui, grâce aux propriétés de la transformée de Mellin, s’expriment comme :

$$\tilde{m}_n = \left. \frac{d^n \phi_p(s)}{ds^n} \right|_{s=1} = \int_0^{+\infty} (\log x)^n p(x) dx.$$

et enfin, par dérivation logarithmique de cette dernière, ses “log-cumulants” :

$$\tilde{\kappa}_n = \left. \frac{d^n \log(\phi_p(s))}{ds^n} \right|_{s=1}$$

Dans le cas de lois à queue lourde, on voit l’intérêt des log-moments : en effet, pour quasiment toutes les lois usuelles, les log-moments sont définis à tous les ordres, ce qui fait que tous les log-cumulants sont eux aussi définis.

Propriétés des log-statistiques

Deux propriétés majeures sont à souligner dans l’univers des statistiques de Mellin :
 ★ si une loi $p(x)$ possède $\phi_p(s)$ comme fonction caractéristique de deuxième espèce, alors sa loi inverse, c’est à dire la loi suivie par la variable $y = \frac{1}{x}$ a pour fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_q(s)$ avec :

$$\phi_q(s) = \phi_p(2 - s)$$

★ Dans le cadre de la “généralisation” des lois, c’est à dire, pour une loi $p(x)$ ayant $\phi_p(s)$ comme fonction caractéristique de deuxième espèce comment déterminer la loi suivie par n’importe quelle puissance de x , on a, pour $y = x^\eta$:

$$q(y) = |\eta| x^{(\eta-1)} p(x^\eta) \Leftrightarrow \phi_q(s) = \phi_p\left(\frac{s + \eta - 1}{\eta}\right) \quad (1)$$

Grâce à ces propriétés on en déduit deux lois importantes en imagerie cohérente : la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[\mu, L]$ et la loi Gamma généralisée $\mathcal{GG}[\mu, L, \eta]$:

$$\begin{cases} \mathcal{GI}[\mu, L](x) &= \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{L^\mu} \left(\frac{L\mu}{x}\right)^{L+1} e^{-\frac{L\mu}{x}} \\ \mathcal{GG}[\mu, L, \eta](x) &= \frac{|\eta|}{\mu} \frac{L^{\frac{1}{\eta}}}{\Gamma(L)} \left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^{\eta L - 1} e^{-\left(\frac{L^{\frac{1}{\eta}} x}{\mu}\right)^\eta} \end{cases} \quad (2)$$

2 Les lois en présence de milieu hétérogène

Hypothèse de bruit multiplicatif

Lorsque les zones imagées n’ont plus une texture homogène, des hypothèses sur ces textures conduisent à modéliser celle-ci sous forme de lois diverses. Puisque le chatolement agit multiplicativement, on montre que celui-ci opère comme une convolution de Mellin appliquée à la loi de texture (2002, [8]). Si une texture est modélisée par une loi $p(x)$ et que le chatolement, modélisé par $q(x)$, agit multiplicativement sur celle-ci, alors la loi de probabilité $r(x)$ suivie par les données s’écrit :

$$r(x) = p(x) \hat{\star} q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}[r](s) = \mathcal{M}[p](s) \mathcal{M}[q](s).$$

C’est ainsi que l’on obtient une loi K si la texture suit une loi Gamma –comme l’a montré Epstein [3](1948) et plus tard Jakeman dans l’univers du radar (1976) [5]– et une loi de Fisher si la texture suit une loi Gamma Inverse (Nicolas, [8] (2002)).

Cette démarche peut se généraliser de sorte que la distribution résultante a pour fonction caractéristique de deuxième espèce l’expression suivante :

$$\sim \prod_{p=1}^P \frac{\Gamma(L_p + s - 1)}{\Gamma(L_p)} \prod_{q=1}^Q \frac{\Gamma(M_q + 2 - s)}{\Gamma(M_q)} \quad (3)$$

Hypothèse de lois multiplicatives

Un modèle empirique proposé par Halphen [2] (1941) consiste à multiplier une loi Gamma et une loi Gamma inverse. En ajoutant un paramètre d’ajustement du mode, on peut ainsi définir la loi de Halphen modifiée $\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x)$ par la relation :

$$\mathcal{HM}[\mu, \beta, \varepsilon](x) = \frac{1}{2\mu \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{\beta-\varepsilon}{2}} K_{\beta-\varepsilon}(\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\beta-\varepsilon-1} e^{-\frac{\beta x}{\mu} - \frac{\varepsilon \mu}{x}}$$

Très utilisée en hydrologie (Morlat [7](1956)), ce type de loi est plus connu sous le nom de loi Gaussienne Inverse Généralisée (Jorgensen(1982)[6]). Grâce aux propriétés de la transformée de Mellin, sa fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi_{\mathcal{HM}}(s) = \frac{\mu^{s-1}}{K_{\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})} \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{s-1}{2}} K_{s-1+\beta-\varepsilon}(2\sqrt{\beta\varepsilon})$$

mais ne permet pas de calculer ses log-cumulants, ce qui limite son exploitation théorique.

3 Un nouveau formalisme en fonctions de Meijer

Etape de réécriture

La transformée de Mellin est inversible. Si on connaît la fonction caractéristique de deuxième espèce $\phi_p(s)$ d'une loi de probabilité $p(x)$ définie sur \mathbb{R}^+ , alors on a :

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi_p(s) ds \quad (4)$$

Appliquée à la relation 3, on obtient :

$$p(x) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \prod_{p=1}^P \frac{\Gamma(L_p + s - 1)}{\Gamma(L_p)} \prod_{q=1}^Q \frac{\Gamma(M_q + 2 - s)}{\Gamma(M_q)} ds$$

Si l'on compare cette expression avec la définition des fonctions de Meijer [1] :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds$$

on voit que $p(x)$ s'exprime sous forme d'une fonction de Meijer :

$$p(x) \sim \overline{G}_{Q,P}^{P,Q} \left(\frac{\prod_p L_p x}{\prod_q M_q \mu} \left| \begin{array}{l} -M_1, \dots, -M_Q ; \quad . \\ L_1 - 1, \dots, L_P - 1 ; \quad . \end{array} \right. \right) \quad (5)$$

Propriétés des fonctions de Meijer

Parmi les nombreuses propriétés de ces fonctions, on peut remarquer que :

– la dérivée d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer. On a en effet [1] :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{l} -1, a_1 - 1, \dots, a_n - 1 ; a_{n+1} - 1, \dots, a_p - 1 \\ b_1 - 1, \dots, b_m - 1 ; 0, b_{m+1} - 1, \dots, b_q - 1 \end{array} \right. \right)$$

– la primitive d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer. On a en effet [1] :

$$\frac{d}{dx} \overline{G}_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(x \left| \begin{array}{l} 1, a_1 + 1, \dots, a_n + 1 ; a_{n+1} + 1, \dots, a_p + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_m + 1 ; 0, b_{m+1} + 1, \dots, b_q + 1 \end{array} \right. \right) = \overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n ; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m ; b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right)$$

Cette dernière relation est essentielle pour les lois de probabilités car elle permet de définir la fonction de répartition d'une loi de probabilité s'exprimant comme une fonction de Meijer.

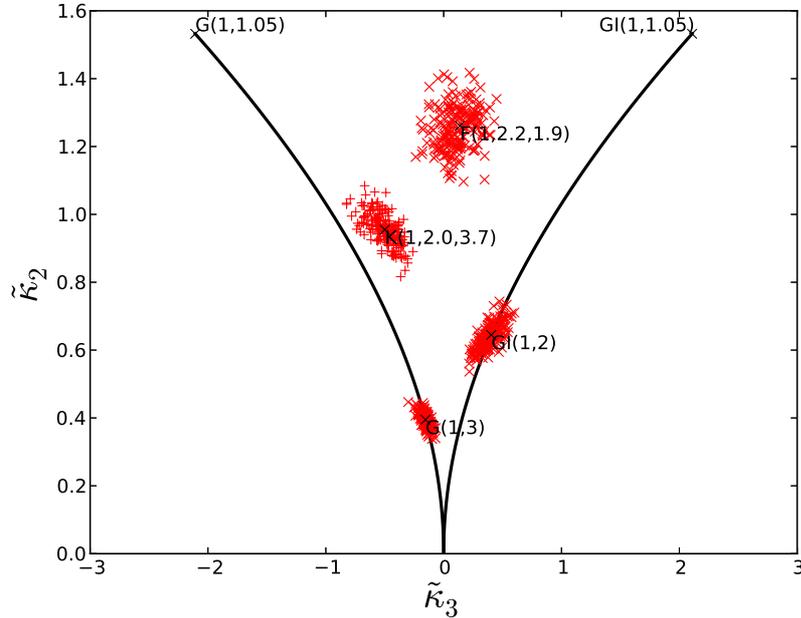


FIGURE 1 – Diagrammes $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ pour différentes lois usuelles définies sur \mathbb{R}^+ . Dans ce diagramme, la branche de gauche représente les lois Gamma et la branche de droite les lois Gamma Inverse. Chaque tirage est représenté dans ce diagramme par une croix dont l'abscisse est le log-cumulant d'ordre 3 et l'ordonnée le log-cumulant d'ordre 2. Sont ainsi représentés des tirages de la loi Gamma $\mathcal{G}[1, 3]$, de la loi K $\mathcal{K}[1, 2, 3.7]$, de la loi de Fisher $\mathcal{F}[1, 2.2, 1.9]$ et de la loi Gamma Inverse $\mathcal{GI}[1, 1.2]$.

Application aux lois de l'imagerie cohérente

Puisque nous nous sommes dotés de lois s'exprimant sous forme de fonctions de Meijer (relation 5), il est alors aisé d'en calculer leur primitive et d'en déduire leur fonction de répartition. La table 1 en illustre certains cas classiques, ainsi qu'un cas de loi généralisée : la loi Fisher Généralisée $\mathcal{FG}[\mu, L, M, \eta]$ (grâce à la propriété 1). Nous pouvons ainsi effectuer aisément des simulations de ces lois grâce à cette nouvelle approche, les fonctions de Meijer étant reconnus dans certains logiciels comme Python ou Maple.

Conclusion

Les lois de l'imagerie cohérente présentent certaines propriétés qui en rendent leurs manipulations parfois difficiles, principalement dû au fait qu'elles sont des exemples de lois à queue lourde. L'approche des log-statistiques, associé au formalisme de Meijer, permet

Loi	Expression “à la Meijer”	Fonction de répartition
$\mathcal{G} [\mu, L] (x)$	$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \mid \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)} \overline{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{Lx}{\mu} \mid \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$
$\mathcal{GI} [\mu, M] (x)$	$\frac{1}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{1,0}^{0,1} \left(\frac{x}{M\mu} \mid \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ \cdot & ; & \cdot \end{matrix} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(M)} \overline{G}_{2,1}^{0,2} \left(\frac{x}{M\mu} \mid \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ \cdot & ; & 0 \end{matrix} \right)$
$\mathcal{F} [\mu, L, M] (x)$	$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \mid \begin{matrix} -M; & \cdot & \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{Lx}{M\mu} \mid \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right)$
$\mathcal{K} [\mu, L, M] (x)$	$\frac{LM}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{0,2}^{2,0} \left(\frac{LMx}{\mu} \mid \begin{matrix} \cdot & & ; \cdot \\ L-1, M-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \overline{G}_{1,3}^{2,1} \left(\frac{LMx}{\mu} \mid \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L, M & ; & 0 \end{matrix} \right)$

TABLE 1 – Exemples de lois s’exprimant sous forme de fonction de Meijer et leur fonction de répartition

d’en démystifier certains aspects. Nul doute que cette approche pourrait bénéficier à d’autres disciplines, en particulier celles qui utilisent des lois à queue lourde pour modéliser des évènements rares, comme on peut le trouver entre autres en hydrologie.

Références

- [1] H. Bateman *Higher transcendental functions* McGraw-Hill, 1953
- [2] D. Dugué *Sur un nouveau type de courbe de fréquence* Compte rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences, Vol. 213, p.634-635,1941
- [3] B. Epstein *Some applications of the Mellin transform in statistics.* Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379.
- [4] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications..* Roberts & Company, 2007.
- [5] E. Jakeman, N. Pusey *A model for non Rayleigh sea echo.* IEEE Trans. on AP, Vol 24, no 6, 1976, pp 806-814.
- [6] B. Jorgensen *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution.* Springer-Verlag 1982
- [7] G. Morlat *Les lois de probabilités de Halphen* Revue de statistique appliquée, tome 4, no 3, pp21-26, 1956
- [8] J-M Nicolas, *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l’analyse des lois d’images radar,* Traitement du signal, vol 19, No 3, pp 139–167, 2002.