

# GENERALISATION DU TEST DE NON-STATIONNARITE DE DICKEY-FULLER AUGMENTE. ETUDE PAR LES METHODES DE SIMULATION DE MONTE CARLO

Youcef Benyammi<sup>1</sup>, OumElkeir Moussi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée  
Adresse: Pôle universitaire de Koléa, Tipaza, Algérie  
[youcebeny@gmail.com](mailto:youcebeny@gmail.com)

<sup>2</sup> Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée  
Adresse: Pôle universitaire de Koléa, Tipaza, Algérie  
[eokmoussi@yahoo.fr](mailto:eokmoussi@yahoo.fr)

## Résumé.

Habituellement, nous utilisons les tests de Dickey - Fuller (1979 , 1984) afin de détecter la stationnarité d'une série temporelle sous les hypothèses:  $H_0: I(1)$  (présence d'une racine unitaire) contre  $H_1: I(0)$  (absence d'une racine unitaire) ; ce test est utilisé généralement dans le cas d'une mémoire courte. Dans cet article, nous proposons une extension du test fractionnaire Dickey-Fuller proposé par Bensalma (2013) et utilisé dans le cas longue mémoire, au cas où les erreurs de l'équation de régression du test sont auto-corrélées (le cas augmenté). Le test proposé est considéré comme une généralisation du test ADF (1984). Les propriétés asymptotiques de ce test sont étudiées et démontrées à l'aide des simulations de Monte Carlo.

**Mots-clés.** Intégration fractionnaire, test de Dickey-Fuller fractionnaire, ARFIMA, mémoire longue.

## Abstract.

Usually, we use the Dickey-Fuller test (1979, 1984) for testing stationarity in a time series under the hypotheses  $H_0: I(1)$  (presence of unit root) versus  $H_1: I(0)$  (absence of unit root), and it is used in the case of a short memory. In this article, we propose an extension of the fractional Dickey-Fuller test proposed by Bensalma (2013) used in the long memory case and when the errors of test regression are auto-correlated. The proposed test is considered as a generalization of ADF test (1984). The asymptotic properties of this test are demonstrated and studied by Monte Carlo simulation.

**Keywords.** Fractional integration, fractional Dickey-Fuller test, ARFIMA model, long-memory.

## 1. Introduction

L'identification du paramètre d'intégration fractionnaire ( $d$ ) dans les processus ARFIMA( $p, d, q$ ), a fait l'objet plusieurs travaux (Robinson(1994); Tanaka(1999); Dolado (2002)..). Les tests statistiques basés sur ce paramètre se sont révélés très utiles pour capturer les propriétés de persistance de nombreux processus à mémoire longue. Ces derniers cherchent à identifier le domaine d'appartenance du paramètre  $d$ : si  $d < \frac{1}{2}$  le processus est stationnaire (asymptotiquement stationnaire) et si  $d \geq \frac{1}{2}$  le processus ne l'est pas.

Bensalma (2013)<sup>1</sup> a élaboré un nouveau test appelé «Nouveau test de Dickey-Fuller Fractionnaire»

---

<sup>1</sup> Bensalma, A. (2013), Unified Theoretical Framework for Unit Root Test and Fractional Unit Root Test, *Arvix*, 1209.1031v2.

(NFDF test) inspiré essentiellement du test de Dickey- Fuller (1979) et étendu au cas fractionnaire. Il se base sur le paramètre d'intégration fractionnaire avec les hypothèses suivantes:

$$H_0: d \geq d_0 \text{ contre } H_1: d < d_0.$$

La régression du test s'écrit comme suit:

$$\Delta^{d_0-1}y_t = \phi \Delta^{d_0-1}y_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{où } \epsilon_t \text{ un bruit blanc, } V(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2. \quad (1)$$

Et  $\Delta = (1 - B)$  est le filtre de différenciation, et B est l'opérateur retard.

L'équation (1) est à équivalente à:

$$\Delta^{d_0}y_t = \rho \Delta^{d_0-1}y_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{où } \rho = \phi - 1. \quad (2)$$

Par conséquent, tester  $H_0: d \geq d_0$  contre  $H_1: d < d_0$  revient à tester:  $H_0: \rho = 0$  contre  $H_1: \rho < 0$ .

Bensalma (2013), a démontré que la distribution de la statistique de ce test est similaire à celle du test de Dickey-Fuller (1979) lorsque  $d = d_0$ . Par ailleurs, il a montré que les deux tests (NFDF test et le test de Dickey-Fuller (1979)) ont les mêmes propriétés.

En se basant sur les résultats obtenus par Bensalma (2013), nous allons étendre le principe de ce test au cas d'une régression d'un test de Dickey-Fuller fractionnaire augmenté. Pour cela, nous utiliserons les méthodes de simulation de Monte Carlo.

## 2. Extension du test NFDF au cas augmenté : Nouveau test de Dickey-Fuller Fractionnaire augmenté (NFADF test):

Les distributions asymptotiques des statistiques données dans le test NFDF ont été étudiées sous l'hypothèse de non-autocorrélation du terme de l'erreur ( $\epsilon_t$ ) dans la régression (1) (Bensalma, 2013). Mais cette hypothèse n'étant pas toujours réalisée, des retards de la variable endogène ( $\Delta^{d_0}y_t$ ) sont alors rajoutés pour tenir compte d'un terme d'erreur non-autocorrélé.

Soit  $(y_t, t \in Z)$  un processus aléatoire fractionnaire et soit:

$$\Delta^{d_0-1}y_t = x_t. \quad (3)$$

La régression du test présentée par (2) peut être écrite comme suit:

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t,$$

où  $\epsilon_t \sim AR(p-1)$ :  $\epsilon_t = \sum_{j=1}^{p-1} a_j \epsilon_{t-j} + u_t$  et  $(u_t)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (va iid).

On voit bien que les erreurs sont auto-corrélées.

### Lemme:

*Tout processus  $(x_t)_{t \in Z}$  AR(1) avec erreurs auto-corrélées d'ordre  $(p-1)$  peut se ramener à un AR(p) avec erreurs non-autocorrélées.*

### **Démonstration:**

Afin de se ramener à une régression avec des erreurs non auto-corrélées on effectue la transformation suivante:

$$\begin{aligned} x_t &= \phi x_{t-1} + \epsilon_t \\ -a_1 x_{t-1} &= -a_1 \phi x_{t-2} - a_1 \epsilon_{t-1} \\ -a_2 x_{t-2} &= -a_2 \phi x_{t-3} - a_2 \epsilon_{t-2} \\ -a_3 x_{t-3} &= -a_3 \phi x_{t-4} - a_3 \epsilon_{t-3}, \dots, -a_{(p-1)} x_{t-(p-1)} = -a_{(p-1)} \phi x_{t-p} - a_{(p-1)} \epsilon_{t-(p-1)}. \end{aligned}$$

En sommant les équations, on obtient:

$$\begin{aligned} x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} - a_3 x_{t-3} - \dots - a_{(p-1)} x_{t-(p-1)} \\ = \phi x_{t-1} + \epsilon_t - a_1 \phi x_{t-2} - a_1 \epsilon_{t-1} - a_2 \phi x_{t-3} - a_2 \epsilon_{t-2} - a_3 \phi x_{t-4} - a_3 \epsilon_{t-3} - \dots \\ - a_{(p-1)} \phi x_{t-p} - a_{(p-1)} \epsilon_{t-(p-1)}. \end{aligned}$$

et comme  $\epsilon_t = \sum_{j=1}^{p-1} a_j \epsilon_{t-j} + u_t$

$$\text{on peut écrire } x_t = (a_1 + \phi)x_{t-1} + (a_2 - a_1\phi)x_{t-2} + \dots + (a_{(p-1)} - a_{(p-2)}\phi)x_{t-p+1} + a_{(p-1)}\phi x_{t-p} + u_t. \quad (4)$$

$$= \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_{(p-1)} x_{t-p+1} + \alpha_p x_{t-p} + u_t \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(B)x_t = u_t$$

où  $\alpha(B) = \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_{(p-1)} B^{p-1} + \alpha_p B^p$ , polynôme caractéristique de l'équation et dont toutes les racines sont à l'extérieur du cercle unité. On remarque que cette régression est celle d'un processus autorégressif d'ordre  $(p)$ . A partir de cette dernière expression, nous avons montré qu'un processus  $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  suivant un  $AR(1)$  avec erreurs auto-corrélées d'ordre  $(p-1)$  peut se ramener à un  $AR(p)$  avec erreurs non auto-corrélées.

### **Conséquences du lemme:**

*Un processus  $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$   $AR(k)$  avec erreurs autocorrélées suivant un  $AR(p-k)$ , peut toujours se ramener à un processus suivant un  $AR(p)$  avec erreurs non auto-corrélées.*

**Démonstration:** (voir Annexe 1)

La régression finale, est donnée par:

$$\Delta x_t = (\phi - 1)(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-1})x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t.$$

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta x_{t-j} + u_t. \quad (6)$$

Où  $\rho = (\phi - 1)(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-1})$ .

On remplace  $x_t$  par l'expression (3) et l'on obtient:

$$\Delta \Delta^{d_0-1} y_t = \rho \Delta^{d_0-1} y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta \Delta^{d_0-1} y_{t-j} + u_t.$$

Cette équation est équivalente à:

$$\Delta^{d_0} y_t = \rho \Delta^{d_0-1} y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta^{d_0} y_{t-j} + u_t. \quad (7)$$

### **Remarque:**

(i) Si les coefficients  $\gamma_j$  ne sont pas significatifs, on aura le modèle simple du test NFDF:

$$\Delta^{d_0} y_t = \rho \Delta^{d_0-1} y_{t-1} + u_t.$$

(ii) Si  $d_0 = 1$ , alors:

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t. \quad (8)$$

Ce modèle représente la régression du test classique de Dickey-Fuller Augmenté. Ainsi, ce test est considéré comme une généralisation du test de stationnarité de Dickey-Fuller Augmenté (1984), et il est basé sur la signification statistique du coefficient  $\rho$  dans la régression.

## **3. Extension du test :**

Soit  $(y_t, t \in \mathbb{Z})$  un processus aléatoire fractionnaire vérifiant l'équation (3) et soit le problème de test suivant :

$$H_0 : d \geq d_0 \text{ et } H_1 : d < d_0$$

### **Proposition 1:**

*Sous l'hypothèse nulle de non stationnarité du processus aléatoire  $(y_t, t \in \mathbb{Z})$  ( $d \geq d_0$ ) l'estimateur des moindres carrés ordinaires  $\hat{\rho}$ , du coefficient  $\rho$  de la régression du nouveau test de Dickey Fuller Augmenté fractionnaire est nul.*

**Proposition 2:**

Sous l'hypothèse alternative de stationnarité du processus aléatoire  $(y_t, t \in Z)$  où  $(d < d_0)$  l'estimateur des moindres carrés ordinaires  $\hat{\rho}$ , du coefficient  $\rho$  de la régression du nouveau test de Dickey-Fuller Augmenté fractionnaire est strictement inférieur à zéro et il converge vers l'infini lorsque  $d_0$  est grand.

**Démonstration:**

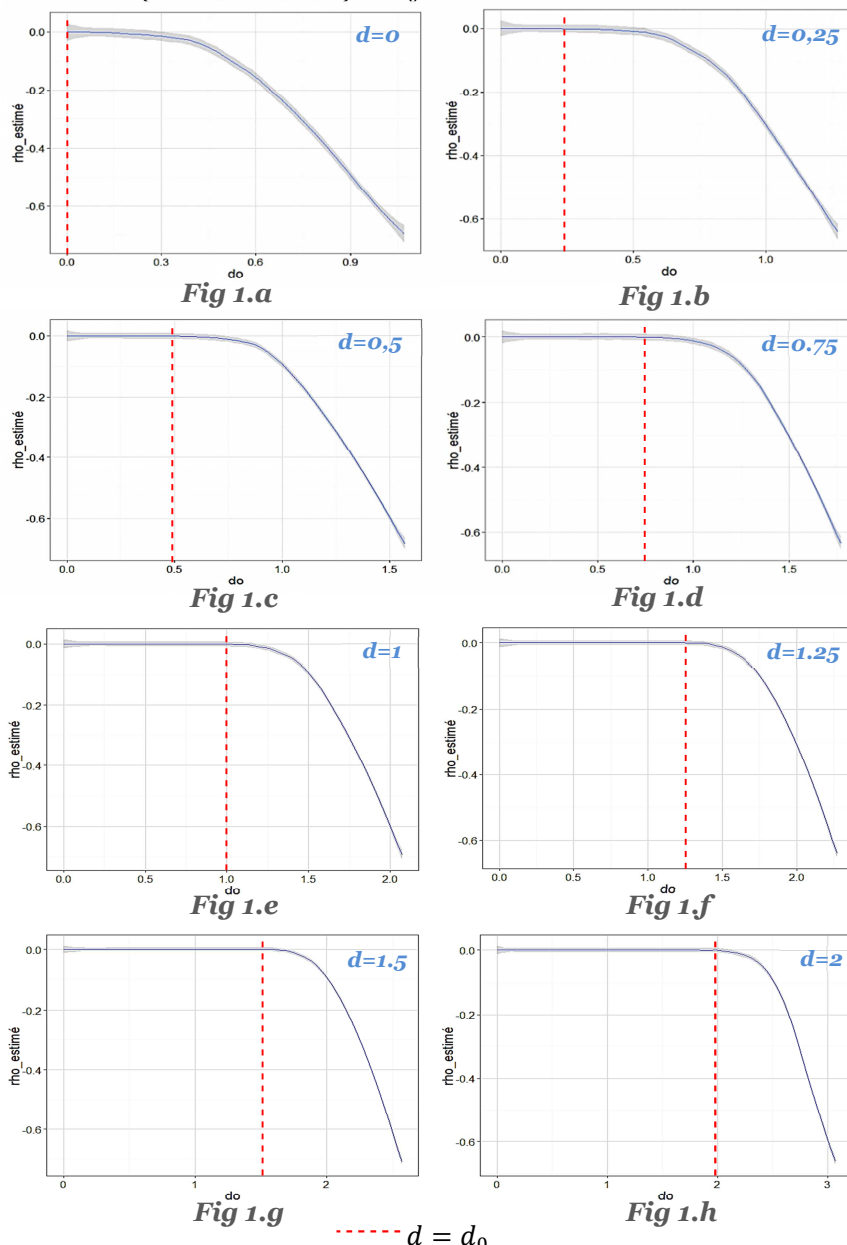
La démonstration de ces deux propositions se fera à l'aide de simulations :

Sous les propositions énoncées, tester  $\begin{cases} H_0 : d \geq d_0 \\ H_1 : d < d_0 \end{cases}$  revient à tester  $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$  à partir de la régression (8).

Pour démontrer cette équivalence d'hypothèses, nous avons simulé des séries de 500 observations de processus ARFIMA(1,d,0) pour plusieurs valeurs de  $d$  ( $d = 1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 2$ ), en fonction de  $d_0$  qui prend des valeurs variant d'un pas de 0.01.

La figure ci-dessous représente les courbes lissées des  $\hat{\rho}$  estimés à partir des régressions du test NFAFD.

**Figures 1:** Convergence du coefficient  $\hat{\rho}$  selon les valeurs de  $d$  ( $d = 0, 0.25, \dots, 2$ ) et  $d_0$  des processus ARFIMA(1,d,0).



L'équivalence entre les deux premières hypothèses et les secondes, est bien claire dans la Figure (1), tel qu'on remarque qu'à chaque fois qu'on fixe  $d$  la valeur de  $\hat{\rho}$  vaut 0 quel que soit  $d_0 \leq d$ , dès que les valeurs de  $d_0$  sont supérieures à  $d$  les valeurs de  $\hat{\rho}$  commencent à diminuer et elles prennent des valeurs négatives. Par exemple, soit la figure (1.d), nous remarquons que le coefficient  $\hat{\rho} = 0$  lorsque  $d_0 \leq 0.75$  (jusqu'à la droite discontinue rouge où  $d_0 = d$ ) et à partir de ce point les valeurs de  $\hat{\rho}$  commencent à diminuer avec des valeurs négatives ce qui confirme que l'hypothèse  $\rho = 0$  est équivalente à de  $d \geq d_0$ , de même que l'hypothèse alternative  $\rho < 0$  est équivalente à l'hypothèse  $d < d_0$ .

Dans ce qui suit nous essayons d'étudier le comportement de la distribution asymptotique de la statistique du test.

**Proposition 3:**

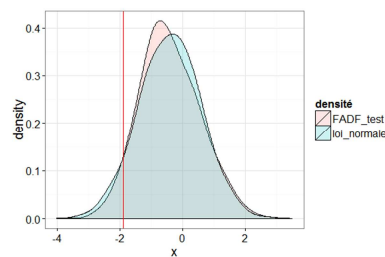
*Sous l'hypothèse :  $d = d_0$ , la distribution asymptotique de la statistique du test NFADF est invariante et identique à la distribution de la statistique du test ADF.*

**Démonstration (Calcul des Valeurs critiques):**

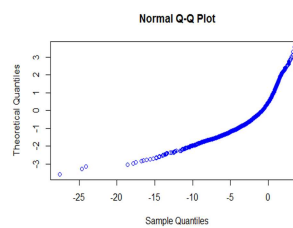
Dans la suite, nous allons calculer les valeurs critiques asymptotiques des échantillons finis du test NFADF. Les expériences de simulation, présentées ici, sont comme suit:

- a. D'abord, notre objectif est de générer plusieurs séries correspondantes aux modèles ARFIMA(0,d,0) et ARFIMA(p,d,0).
- b. Les régressions du test (8) ont été estimées en posant  $d = d_0 = 0,5$  pour assurer la condition de similarité entre les deux distributions DF et NFDF.
- c. Les quantiles estimés (les valeurs critiques) des différentes tailles d'échantillon sont obtenus à partir d'une moyenne arithmétique de 50 expériences de simulation contenant chacune 10.000 répliques.

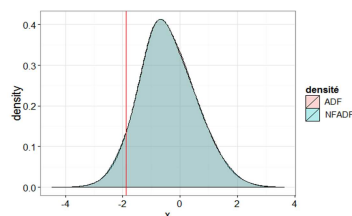
**Figures 2: Comparaison de la distribution empirique du test NFADF avec la loi normale et avec la distribution empirique du test ADF**



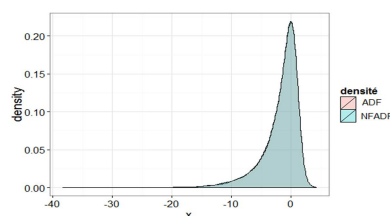
**Fig 2.a**



**Fig 2.b**



**Fig 2.c**



**Fig 2.d**

A partir des Figures ci-dessus, la distribution de la statistique du test NFADF est différente de la distribution normale de même espérance et même variance (Fig 2.a), et ceci est confirmé par le

graphe quantile-quantile représenté dans la figure (2.b) qui laisse suggérer que la distribution de la statistique du test ne suit pas une loi normale. Les figures (2.c) et (2.d) représentent les graphes des distributions empiriques de la statistique du test ADF et NFADF, de la distribution de  $n\hat{\rho}$  (ratio) du test ADF et NFADF respectivement. On remarque qu'il y a une superposition parfaite des distributions, ce qui confirme l'énoncé de notre proposition.

D'après le tableau des valeurs critiques estimées (voir annexe 2):

- On voit bien qu'ils sont quasi-similaires aux valeurs critiques usuelles tabulées par Dickey-Fuller (1981) et Dickey et Said (1984) et par J. MacKinnon (1994).
- D'un autre coté les valeurs critiques calculées pour la même taille d'échantillon des différents nombres de retard pour le même seuil sont très proches les unes des autres.
- Par conséquent le choix d'une seule valeur pour tous les retards est convenable, donc on choisit la moyenne des valeurs critiques comme la valeur représentante.

**Proposition 4:**

Soit  $(y_t, t \in Z)$  un processus aléatoire, et  $\alpha, \beta$  les erreurs de première et deuxième espèce respectivement d'un test de Dickey Fuller fractionnaire augmenté dont les hypothèses sont données par :

$$H_0: d \geq d_0 \text{ contre } H_1: d < d_0$$

Alors il existe un test sans biais déterminé par la région critique  $W_\alpha$ , où  $W_\alpha = \{t < c_n(\alpha)\}$  telle que:

$$P_{H_0}(t \geq c_n(\alpha)) \geq 1 - \alpha.$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{H_1}(t < c_n(\alpha)) = 1.$$

où  $t$  est la statistique du test correspondante à  $\hat{\rho}$ , et  $c_n(\alpha)$  une valeur critique au seuil  $\alpha$ .

**Démonstration par simulation**

Dans cette section, nous allons procéder aux simulations de Monte Carlo pour établir la robustesse du test dans le cas augmenté en analysant les erreurs de première espèce ( $\alpha$ ) et les erreurs de deuxième espèce ( $\beta$ ) de plusieurs modèles ARFIMA( $p, d, 0$ ) où nous avons pris les valeurs de  $d$  ( $d = 0, 0.5, 1$ ).

Nous allons étudier les probabilités calculées d'acceptations de l'hypothèse nulle ( $1 - \alpha$ ) ainsi que la puissance du test ( $1 - \beta$ ) aux seuils 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey-Fuller des différents modèles simulés avec différentes tailles d'échantillon. Pour chaque expérience il y aura 10000 répliquions (les tableaux des résultats sont exposés dans l'annexe 2).

**Résultats et conclusions:**

A partir des tableaux 2, 3 et 4, on remarque que:

- Sous  $H_0$ , lorsque la valeur de  $d_0$  est égale à la vraie valeur  $d$ , la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle est voisine de la valeur  $(1 - \alpha) \forall \alpha = 1\%, 5\% \text{ et } 10\%$  (première colonne des 3 premiers tableaux) avec un écart qui ne dépasse pas 1% et d'une moyenne des écarts 0.33% ce qui confirme la similarité de cette distribution (test de NFADF) avec celle du test de Dickey-Fuller augmenté.
- Pour les autres valeurs de  $d_0$ , les résultats obtenus montrent qu'à chaque fois qu'on s'éloigne de la valeur critique, la probabilité d'accepter  $H_0$  augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne 100% (pour les grandes tailles d'échantillon) avec un écart entre la vraie valeur  $d$  et la valeur choisi  $d_0$  ( $d - d_0$ ) qui ne dépasse pas 0,5%.

Dans les tableaux où on a calculé les puissances (Tableaux 5, 6 et 7):

- Le lien entre le risque  $\alpha$  et la puissance est bien déterminé, de telle sorte que lorsque nous prenons un risque  $\alpha$  élevé et qu'on agrandisse la région de rejet, la puissance va augmenter également et vice versa.
- On remarque que la puissance est faible et elle augmente au fur et à mesure qu'on augmente le risque  $\alpha$  et la taille d'échantillon. Mais dans tous les cas elle reste supérieure au risque  $\alpha$  : exemple pour  $\alpha = 1\%$ , toutes les puissances calculées sont supérieures à 1% (même remarques pour  $\alpha = 5\%$  et pour  $\alpha = 10\%$ ). Ceci signifie que c'est un test sans biais.
- On remarque aussi que les puissances atteignent 100% lorsque l'écart entre  $d$  et  $d_0$  est grand et surtout lorsque la taille d'échantillon est grande (par exemple lorsque  $|d - d_0| \geq 1$  et/ou lorsque  $T=1000$ ).

#### 4. Conclusion

Vu les résultats obtenus dans cette étude, ce nouveau test (NFADF) peut être considéré comme une extension du nouveau test de Dickey-Fuller fractionnaire présenté par Bensalma (2013). D'autre part, il peut être considéré comme une généralisation du test de Dickey-Fuller augmenté présenté par Said et Dickey (1984) lorsque  $d_0 = 1/2$ , où l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  couvre le cas stationnaire des deux comportements courte et longue mémoire, et l'autre  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  couvre le cas non stationnaire.

#### 5. Bibliographie

- [1] Bensalma, A. (2013), A Consistent test for Unit Root against Fractional alternative, *5th International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*, Tunisia.
- [2] Bensalma, A. (2013), Unified Theoretical Framework for Unit Root Test and Fractional Unit Root Test, *Arxiv*, 1209.1031v2.
- [3] Beran, J. (1994), *Statistics for Long-memory Processes*, Chapman & Hall, New York.
- [4] Dolado, J. Gonzalo, J. and Mayoral, L. (2002), A Fractional Dickey-Fuller Test for Unit Roots, *Econometrica*, 70, 1963-2006.
- [5] Dickey, A. and Fuller, W. (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with unit root, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [6] Dickey, A. and Fuller, W. (1981), Likelihood ratio tests for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- [7] Dickey, A. and Said, S. (1984), Testing for unit root in autoregressive moving average models of unknown order, *Biometrika*, 71, 599-607.
- [8] Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.
- [9] Lobato, I. et Velasco, C. (2006), Optimal fractional Dickey-Fuller tests for unit roots, *Econometrics Journal*, 9, 492-510.

#### Annexe 1: Démonstration du lemme:

Pour simplifier la démonstration prenons des processus autorégressifs  $AR(p)$  avec des coefficients plus facile à manier que ceux de l'expression précédente qui dépendent des  $\phi$  et des  $a$ :

**Pour un AR(1):**

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + u_t \text{ où } u_t \text{ un bruit blanc de variance } \sigma_u^2$$

$$\text{On peut l'écrire: } \Delta x_t = (\alpha_1 - 1) x_{t-1} + u_t$$

**Pour un AR(2):**

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t$$

$$\begin{aligned} \text{On peut l'écrire: } \Delta x_t &= \alpha_1 x_{t-1} - x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + u_t \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)x_{t-1} - \alpha_2(x_{t-1} - x_{t-2}) + u_t \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)x_{t-1} - \alpha_2 \Delta x_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

**Pour un AR(3):**

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + u_t$$

On peut l'écrire:

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= \alpha_1 x_{t-1} - x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-1} - \alpha_3 x_{t-1} + \alpha_3 x_{t-2} - \alpha_3 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + u_t \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)x_{t-1} - \alpha_2(x_{t-1} - x_{t-2}) - \alpha_3(x_{t-1} - x_{t-2}) - \alpha_3(x_{t-2} - x_{t-3}) + u_t \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)x_{t-1} - (\alpha_2 + \alpha_3)\Delta x_{t-1} - \alpha_3 \Delta x_{t-2} + u_t \end{aligned}$$

**Pour un AR(p):**

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + u_t$$

On peut l'écrire de la même manière:

$$\Delta x_t = \left( \sum_{k=1}^p \alpha_k - 1 \right) x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t \quad (1.a)$$

On va remplacer les coefficients  $\alpha_k$  de cette expression par leur valeur trouvée dans l'expression (4), c'est-à-dire en fonction des coefficients  $\phi_1$  (correspondant à la partie autorégressive d'ordre 1 du processus  $x_t$ ) et  $a_t$  (correspondant à la partie autorégressive d'ordre  $(p-1)$  des résidus du processus  $x_t$ , c'est-à-dire  $u_t$ ).

Nous obtenons:

$$\alpha_1 = a_1 + \phi$$

$$\alpha_2 = a_2 - a_1 \phi$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{p-1} = a_{p-1} - a_{p-2} \phi$$

$$\alpha_p = -a_{p-1} \phi$$

L'expression (1.a) devient:

$$\Delta x_t = (a_1 + \phi + a_2 - a_1 \phi + a_3 - a_2 \phi + \dots + a_{p-1} - a_{p-2} \phi - a_{p-1} \phi - 1) x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t$$

on factorise par  $\phi$  la première parenthèse du membre de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= [\phi(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-2} - a_{p-1}) + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-2} + a_{p-1} - 1] x_{t-1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t. \\ \Leftrightarrow \Delta x_t &= [\phi(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-2} - a_{p-1}) - (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-2} - a_{p-1})] x_{t-1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x_t = (\phi - 1)(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-1}) x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \left( \sum_{k=j+1}^p \alpha_k \right) \Delta x_{t-j} + u_t$$

Alors:

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta x_{t-j} + u_t.$$

$$\text{Où } \rho = (\phi - 1)(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-1}).$$



## Annexe 2:

Tableau n°1: Les valeurs critiques estimées de la distribution de la statistique du nouveau test de Dickey et Fuller fractionnaire augmenté pour différents retards

T	Le retard (p)	La probabilité que $t_{\hat{\rho}}$ est inférieure à $C(\alpha)$							
		0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
25	0	-2,698	-2,279	-1,957	-1,61	0,913	1,324	1,699	2,099
	1	-2,670	-2,291	-1,964	-1,615	0,926	1,332	1,692	2,094
	2	-2,645	-2,287	-1,955	-1,611	0,910	1,315	1,672	2,084
	3	-2,642	-2,287	-1,957	-1,62	0,921	1,329	1,686	2,101
	4	-2,651	-2,289	-1,951	-1,617	0,912	1,306	1,694	2,091
	5	-2,688	-2,292	-1,952	-1,611	0,916	1,324	1,694	2,093
50	0	-2,624	-2,247	-1,950	-1,631	0,899	1,310	1,641	2,059
	1	-2,623	-2,270	-1,949	-1,645	0,885	1,269	1,630	2,061
	2	-2,624	-2,264	-1,952	-1,624	0,911	1,344	1,632	2,086
	3	-2,629	-2,267	-1,948	-1,618	0,905	1,321	1,636	2,066
	4	-2,631	-2,270	-1,945	-1,617	0,916	1,305	1,642	2,058
	5	-2,620	-2,261	-1,948	-1,622	0,909	1,309	1,629	2,054
100	0	-2,574	-2,278	-1,940	-1,613	0,897	1,304	1,639	2,022
	1	-2,625	-2,258	-1,940	-1,632	0,877	1,287	1,619	1,936
	2	-2,602	-2,257	-1,948	-1,615	0,912	1,298	1,646	2,034
	3	-2,595	-2,237	-1,945	-1,621	0,907	1,302	1,637	2,042
	4	-2,598	-2,241	-1,951	-1,617	0,899	1,289	1,640	2,045
	5	-2,600	-2,247	-1,952	-1,615	0,901	1,307	1,635	2,038
150	0	-2,581	-2,263	-1,943	-1,618	0,903	1,298	1,639	2,041
	1	-2,566	-2,218	-1,938	-1,609	0,898	1,287	1,631	2,019
	2	-2,594	-2,284	-1,947	-1,620	0,901	1,312	1,640	2,035
	3	-2,584	-2,240	-1,950	-1,624	0,910	1,267	1,627	2,045
	4	-2,595	-2,248	-1,941	-1,611	0,886	1,288	1,645	2,034
	5	-2,589	-2,251	-1,946	-1,607	0,900	1,299	1,632	2,039
250	0	-2,574	-2,261	-1,944	-1,609	0,905	1,297	1,621	2,041
	1	-2,623	-2,228	-1,948	-1,629	0,870	1,259	1,596	1,963
	2	-2,530	-2,200	-1,936	-1,598	0,880	1,278	1,608	2,014
	3	-2,571	-2,269	-1,951	-1,615	0,895	1,284	1,618	2,112
	4	-2,590	-2,274	-1,946	-1,619	0,901	1,304	1,617	2,042
	5	-2,654	-2,251	-1,942	-1,620	0,898	1,287	1,618	2,063
500	0	-2,543	-2,208	-1,937	-1,608	0,876	1,267	1,635	2,000
	1	-2,566	-2,230	-1,933	-1,609	0,894	1,283	1,633	2,017
	2	-2,569	-2,225	-1,947	-1,616	0,887	1,277	1,637	2,010
	3	-2,615	-2,236	-1,951	-1,614	0,882	1,284	1,627	2,006
	4	-2,567	-2,218	-1,941	-1,610	0,879	1,290	1,630	2,025
	5	-2,631	-2,222	-1,942	-1,614	0,892	1,305	1,636	2,003
1000	0	-2,554	-2,247	-1,947	-1,610	0,891	1,294	1,610	2,112
	1	-2,561	-2,228	-1,952	-1,612	0,884	1,298	1,609	2,010
	2	-2,568	-2,219	-1,947	-1,612	0,890	1,311	1,616	2,061
	3	-2,571	-2,227	-1,944	-1,614	0,884	1,289	1,620	2,047
	4	-2,563	-2,231	-1,941	-1,615	0,886	1,292	1,611	2,033
	5	-2,567	-2,225	-1,937	-1,617	0,893	1,294	1,618	2,041
3000	0	-2,564	-2,221	-1,935	-1,609	0,882	1,288	1,614	2,054
	1	-2,561	-2,217	-1,937	-1,618	0,884	1,287	1,606	2,039
	2	-2,560	-2,208	-1,942	-1,613	0,889	1,294	1,612	2,044
	3	-2,571	-2,219	-1,948	-1,615	0,880	1,290	1,617	2,048
	4	-2,559	-2,220	-1,939	-1,616	0,888	1,289	1,611	2,051
	5	-2,563	-2,211	-1,942	-1,608	0,879	1,291	1,613	2,048

$C(\alpha)$ : la valeur critique au seuil  $\alpha$ .

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n2: La probabilité simulée d'accepter  $H_0: d = 0 \geq d_0$ , basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4
25	1%	<b>98.1 %</b>	99.3 %	99.8 %	99.7 %	99.9 %
	5%	<b>94.4 %</b>	96.2 %	98.3 %	98.8 %	98.6 %
	10%	<b>89.5 %</b>	93.3 %	95.2 %	97.2 %	96.3 %
50	1%	<b>99.3 %</b>	99.5 %	99.7 %	99.9 %	100 %
	5%	<b>95.4 %</b>	97 %	98.4 %	99.3 %	99.4 %
	10%	<b>89.4 %</b>	93.6 %	96.4 %	98.4 %	98 %
100	1%	<b>99 %</b>	99.8 %	99.9 %	100 %	100 %
	5%	<b>94.5 %</b>	97.6 %	99.3 %	99.6 %	100 %
	10%	<b>89.6 %</b>	95.3 %	97.4 %	98.6 %	99.6 %
500	1%	<b>98.9 %</b>	99.9 %	100 %	100 %	100 %
	5%	<b>95.1 %</b>	98.9 %	99.9 %	100 %	100 %
	10%	<b>91 %</b>	97.2 %	99.2 %	100 %	100 %
1000	1%	<b>98.9 %</b>	99.9 %	99.9 %	100 %	100 %
	5%	<b>94.7 %</b>	99.3 %	99.7 %	100 %	100 %
	10%	<b>89.8 %</b>	98.2 %	99.5 %	99.9 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n3: La probabilité simulée d'accepter  $H_0: d = 0,5 \geq d_0$ , basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
25	1%	<b>99.2 %</b>	99.6 %	99.7 %	99.6 %	100 %
	5%	<b>95.1 %</b>	96.9 %	97.2 %	97.8 %	98.9 %
	10%	<b>89.9 %</b>	93.5 %	94.5 %	95.3 %	97.2 %
50	1%	<b>99.1 %</b>	99.3 %	99.8 %	100 %	100 %
	5%	<b>95.5 %</b>	97.1 %	99 %	99.6 %	99.5 %
	10%	<b>90.6 %</b>	93.3 %	96.7 %	97.3 %	98.5 %
100	1%	<b>99.1 %</b>	99.6 %	99.8 %	100 %	100 %
	5%	<b>95.3 %</b>	98.1 %	99.3 %	99.8 %	100 %
	10%	<b>90.1 %</b>	95.4 %	97.3 %	99.3 %	99.7 %
500	1%	<b>99.2 %</b>	100 %	100 %	100 %	100 %
	5%	<b>95.3 %</b>	98.8 %	99.6 %	99.9 %	100 %
	10%	<b>90.6 %</b>	97.3 %	99.3 %	99.9 %	99.9 %
1000	1%	<b>99.2 %</b>	99.9 %	100 %	100 %	100 %
	5%	<b>94.9 %</b>	99.6 %	100 %	100 %	100 %
	10%	<b>90.9 %</b>	98.4 %	99.9 %	100 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n4: La probabilité simulée d'accepter  $H_0: d = 1 \geq d_0$ , basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	1	0.9	0.8	0.7	0.6
25	1%	<b>99.1 %</b>	99.2 %	99.8 %	99.8 %	99.9 %
	5%	<b>95.4 %</b>	96.3 %	97.6 %	97.8 %	98.1 %
	10%	<b>90.9 %</b>	92.6 %	94.3 %	95.5 %	96.1 %
50	1%	<b>99.1 %</b>	99.4 %	99.8 %	99.8 %	100 %
	5%	<b>95.1 %</b>	97.2 %	98.3 %	99 %	99.3 %
	10%	<b>89.5 %</b>	93.9 %	96 %	97.5 %	98.1 %
100	1%	<b>98.5 %</b>	99.7 %	99.8 %	99.9 %	100 %
	5%	<b>94.4 %</b>	97.9 %	99 %	98.9 %	99.9 %
	10%	<b>89.9 %</b>	95.7 %	97.1 %	98.2 %	99.3 %
500	1%	<b>98.9 %</b>	99.9 %	100 %	100 %	100 %
	5%	<b>95.2 %</b>	98.9 %	99.8 %	100 %	100 %
	10%	<b>90.5 %</b>	97 %	99.3 %	100 %	100 %
1000	1%	<b>99.2 %</b>	99.8 %	100 %	100 %	100 %
	5%	<b>94.8 %</b>	99.3 %	100 %	100 %	100 %
	10%	<b>89.8 %</b>	98.1 %	99.7 %	100 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n5: La probabilité simulée d'accepter  $H_1: d = 0 < d_0$  (La puissance), basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	1
25	1%	02.1 %	03.9 %	04.0 %	08.6 %	83.2 %
	5%	08.0 %	14.5 %	16.3 %	26.6 %	98.5 %
	10%	14.6 %	23.5 %	28.1 %	40.7 %	99.6 %
50	1%	02.6 %	04.3 %	11.0 %	20.6 %	99.8 %
	5%	11.2 %	15.7 %	28.2 %	49.4 %	100 %
	10%	19.1 %	28.1 %	43.5 %	66.4 %	100 %
100	1%	02.5 %	09.5 %	24.0 %	44.7 %	100 %
	5%	10.4 %	25.7 %	47.1 %	71.9 %	100 %
	10%	19.6 %	37.7 %	62.6 %	82.9 %	100 %
500	1%	6.9 %	29.3 %	66 %	95.3 %	100 %
	5%	19.6 %	50.3 %	84.4 %	99.2 %	100 %
	10%	31.2 %	64.4 %	91.5 %	99.8 %	100 %
1000	1%	8.8 %	38 %	83 %	99.3 %	100 %
	5%	22.6 %	60.8 %	93.8 %	99.9 %	100 %
	10%	34 %	72.5 %	97.1 %	100 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n6: La probabilité simulée d'accepter  $H_1: d = 0,5 < d_0$  (La puissance), basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.5
25	1%	01.9 %	02.9 %	05.6 %	08.1 %	83.9 %
	5%	08.6 %	10.3 %	19.6 %	28.5 %	92.1 %
	10%	14.8 %	19.7 %	30.3 %	44.3 %	96.2 %
50	1%	03.7 %	06.5 %	10.9 %	22.6 %	100 %
	5%	10.8 %	17.4 %	31.6 %	48.6 %	100 %
	10%	17.8 %	28.8 %	46.8 %	63.8 %	100 %
100	1%	02.6 %	08.5 %	22.5 %	44.9 %	100 %
	5%	11.8 %	22.1 %	47.8 %	72.8 %	100 %
	10%	20.1 %	35.2 %	60.6 %	84.0 %	100 %
500	1%	07.5 %	67.4 %	30.1 %	95.7 %	100 %
	5%	19.5 %	85.1 %	50.9 %	99.3 %	100 %
	10%	29.9 %	90.8 %	63.5 %	99.8 %	100 %
1000	1%	09.1 %	35.6 %	84.2 %	99.0 %	100 %
	5%	23.8 %	58.1 %	94.4 %	100 %	100 %
	10%	35.4 %	70.3 %	97.4 %	100 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations

**Tableau n7: La probabilité estimée d'accepter  $H_1: d = 1 < d_0$  (La puissance), basé sur les quantiles asymptotiques 1%, 5% et 10% de la distribution de Dickey et Fuller.**

T	$\alpha \backslash d_0$	1.1	1.2	1.3	1.4	2
25	1%	1.8 %	1.8 %	5.8 %	71 %	84.5 %
	5%	7.4 %	10.9 %	20.5 %	28.4 %	97.7 %
	10%	15.7 %	21.6 %	33.9 %	43.9 %	99.4 %
50	1%	1.4 %	6.2 %	10.1 %	20.6 %	100 %
	5%	8.7 %	17.7 %	29.6 %	48.6 %	100 %
	10%	14.8 %	27.7 %	42.9 %	64.8 %	100 %
100	1%	2.7 %	8.4 %	22.1 %	43.6 %	100 %
	5%	11.8 %	24.5 %	47.2 %	71.2 %	100 %
	10%	20.1 %	36.2 %	63.2 %	82.9 %	100 %
500	1%	7.3 %	27.2 %	62.6 %	95.5 %	100 %
	5%	20.8 %	49.2 %	81.2 %	99.8 %	100 %
	10%	30.2 %	62.4 %	88.6 %	100 %	100 %
1000	1%	9.8 %	37.5 %	81.9 %	99.2 %	100 %
	5%	24.9 %	61.5 %	92.1 %	100 %	100 %
	10%	34.6 %	71.6 %	96.2 %	100 %	100 %

Source: réalisé par nous-mêmes à partir des simulations