Recherche de carte d'idéotypes de sorgho d'après un modèle de culture : Optimisation conditionnelle à l'aide d'un métamodèle de krigeage

Diariétou Sambakhé[1,2,3], Eric Gozé[2], Lauriane Rouan[2] & Jean-Noël Bacro[1]

[1] *Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UMR CNRS 5149, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier cedex 5, France, diarietou.sambakhe@cirad.fr*
[2] *Centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement, UR AIDA, F-34398 Montpellier, France , eric.goze@cirad.fr*
[3] *Centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement, UMR AGAP, F-34398 Montpellier, France,lauriane.rouan@cirad.fr*

Résumé. Au Sahel, la répartition des pluies irrégulière dans le temps et dans l'espace engendre une grande interaction variété × année et variété × lieu. Pour déterminer les variétés les plus productives en espérance en fonction des lieux, il faudrait de nombreuses années d'expérimentation en chaque lieu, ce qui prendrait beaucoup de temps.

Une alternative est de maximiser la production prédite à l'aide d'un modèle de culture décrivant la croissance et le développement de cultures en interaction avec leurs conditions agro-environnementales. La production à maximiser est moyenne sur une distribution de probabilité d'entrées environnementales, spécifique du lieu, alors que les paramètres variétaux qui maximisent cette production définissent un but de sélection que l'on appelle idéotype.

Dans ce travail, nous voulons déterminer une carte d'idéotypes de sorgho. Nous sommes donc confrontés à un problème d'optimisation d'un modèle complexe. Une méthode classiquement utilisée dans ce contexte est la méthode Efficient Global Optimization (EGO), fondée sur un métamodèle de krigeage. Ici, la distribution des entrées météorologiques suit un modèle stochastique dont les paramètres varient continûment dans l'espace en suivant un gradient Nord-Sud. L'optimisation des paramètres variétaux est alors conditionnelle à ces paramètres du climat. Cela revient à rechercher une ligne de crête dans l'espace des paramètres. D'autre part, la fonction à maximiser n'est connue que par un nombre limité de simulations, donc à une erreur près. Nous avons cherché à adapter l'algorithme EGO à l'optimisation conditionnelle d'une fonction bruitée.

Mots-clés. Expérimentation, Modèle de culture, Paramètres variétaux, Distribution des entrées, Modèle stochastique, Méthode EGO, Ligne de crête, Fonction bruitée

Abstract. In the Sahel region, the irregular rainfall distribution in time and space generates variety × year and variety × location interactions. Therefore, determining variety with the best expected yield would take many years of experimentation in each location.

Alternatively, the best variety could be identified by maximizing the predicted yield using a crop simulation model that describes growth and development of a crop in interaction with agro-environmental conditions. The average yield depends on the probability distribution of environmental inputs, which is location specific, while the cultivar parameters that maximize this yield define the ideotype, i.e. the selection target.

In this work, we want to draw the map of sorghum ideotypes in Sub Saharan Africa. To face the problem of optimizing a complex model, an algorithm conventionally used in this context is the Efficient Global Optimization method (EGO), based on kriging as a surrogate model. Here, the distribution of meteorological inputs follows a stochastic model whose parameters vary continuously in space along a North-South gradient. Consequently, the optimization of varietal parameters is conditional on these climate parameters. We are then looking for a ridge line in the parameter space. Moreover, the function to maximize is noisy, because expectation and quantiles are merely estimated with a limited number of simulations. We aimed at adapting the EGO algorithm to the conditional optimization of a noisy function.

Keywords. Experimentation, crop model, cultuvar parameters, inputs distribution, stochastic model, EGO method, ridge line, noisy function

1 Introduction

Au Sahel, la répartition des pluies irrégulière dans le temps et dans l'espace a une forte incidence car l'eau limite très souvent la production. Cela engendre une grande interaction variété × année et variété × lieu : la variété la plus productive pour un lieu n'est pas forcément la meilleure partout ; de même, la variété meilleure une année donnée n'est pas forcément la meilleure en espérance. Pour déterminer les variétés les meilleures en espérance, il faudrait de nombreuses années d'expérimentation en chaque lieu, ce qui serait très coûteux.

Une alternative est de maximiser la production prédite à l'aide d'un modèle de culture décrivant la croissance et le développement de cultures en interaction avec leurs conditions agro-environnementales [1].

La production est aléatoire, car elle dépend entre autres fortement des pluies qui vont tomber pendant la saison de culture. C'est donc la maximisation de l'espérance ou d'un quantile de la production que l'on devra rechercher.

Supposons que la production soit prédite à l'aide d'un modèle $g(T, v)$, avec v un vecteur de paramètres qui dépendent de la variété, et T une matrice d'entrées environnementales (météorologie, sol, itinéraire technique). Alors l'objectif de ce travail est de trouver une carte des paramètres optimaux, qui permettront en chaque lieu de maximiser une espérance ou un quantile de la production. Ces paramètres optimaux définissent un but pour le sélectionneur que l'on appelle idéotype .

2 Méthodologie

On considère que la distribution conjointe des variables météo (pluie, vitesse du vent, rayonnement,...) est décrite par un modèle stochastique C du climat avec des paramètres qui dépendent *in fine* du vecteur u des coordonnées - latitude et longitude.

Alors on note $f(u, v)$ la variable aléatoire qui représente la production à un endroit u fixé. Le modèle f est bruité, car la production dépend des pluies qui vont tomber pendant la saison de culture : pour un lieu fixé, à chaque fois qu'on change de saison des pluies la sortie change. C'est donc la maximisation de l'espérance ou d'un quantile de la production qu'on devra chercher.

Pour un lieu u donné, nous avons un problème d'optimisation à résoudre :
- $v^*(u) = \text{argmax}_v E\left[f(u, v)\right]$, si le critère à maximiser est la production moyenne.
- $v^*_\alpha(u) = \text{argmax}_v Q_\alpha\left[f(u, v)\right]$, si le critère à maximiser est le quantile de la production pour un risque α fixé.

Nous voulons trouver une carte des optima, c'est à dire l'ensemble des $v^*(u)$ ou des $v^*_\alpha(u)$ pour chaque lieu u fixé.

Calculer l'optimum indépendamment en chaque point prendrait beaucoup de temps. Les variations du climat étant lentes dans l'espace, on peut supposer que l'optimum en un lieu $u + \delta$ peu éloigné de u est proche de l'optimum en u. Une possibilité est alors d'ajuster une surface de réponse de façon à prendre en compte cette dépendance.

La surface de réponse est une approximation du modèle $E\left(f(u,v)\right)$. Ce modèle de modèle est appelé métamodèle. Il existe plusieurs types de métamodèle parmi lesquels on peut citer : les interpolateurs locaux, les techniques polynomiales, les splines, les réseaux de neurones, le krigeage.
Dans la littérature le métamodèle de krigeage est utilisé avec succès pour l'optimisation globale de fonctions déterministes coûteuses [2, 3, 4].

Une méthode appelée Efficient Global Optimisation (EGO)[5,6] basée sur l'utilisation d'un métamodèle de krigeage a été développée pour l'optimisation globale d'une fonction déterministe. Cette méthode repose sur l'enrichissement séquentiel du plan d'expérience par l'ajout de nouveaux points qui maximisent un critère appelé Amélioration Espérée (AE). Le critère est défini comme l'espérance du dépassement de la valeur maximale observée sur le plan d'expérience.
Pour l'optimisation globale d'une fonction bruitée, la valeur maximale observée est inconnue et le critère AE n'est plus valide. Picheny *et al.* [7] proposent de le remplacer par un critère appelé Amélioration sur les Quantiles du Krigeage (EQI). Pour l'optimisation conditionnelle d'une fonction déterministe, il existe des adaptations de l'algorithme EGO [8]. Pour l'optimisation conditionnelle d'une fonction bruitée, rien n'est encore publié. Nous nous proposons donc d'étendre la méthode EGO à l'optimisation conditionnelle d'une fonction bruitée.
Dans la section 3, nous faisons un rappel sur le principe de l'optimisation à base de métamodèle et sur le choix du critère d'échantillonnage. Nous introduisons dans la section 4 une variante du critère d'amélioration espérée (AE) pour la recherche de ligne de crête d'une fonction bruitée.

3 Principe de l'optimisation à base de métamodèle et choix du critère d'échantillonnage

3.1 Principe de l'optimisation à base de métamodèle

L'optimisation à base de métamodèle peut être décrite selon ces différentes étapes :

1. Réalisation d'un plan initial.
2. Construction du métamodèle à partir du plan d'expérience.
3. Recherche du point qui optimise un critère donné.
4. Calcul du vrai modèle en ce point.
5. Ajout du point au plan d'expérience et mise à jour du métamodèle.

Les étapes de 3, 4 et 5 sont répétées n fois. Le nombre n d'itérations est fixé à l'avance en fonction du budget de l'utilisateur.

3.2 Choix du critère d'échantillonnage

Une approche simple pour guider l'échantillonnage d'un nouveau point, serait de choisir comme futur point d'évaluation le point qui optimise l'espérance du métamodèle conditionnellement aux observations. Le problème avec cette approche est que les points d'évaluation auront tendance à s'accumuler au voisinage de cet optimum, tandis que des zones resteront inexplorées (dans lesquelles la présence d'un maximum ne peut être exclu), ce qui n'est pas satisfaisant pour un problème d'optimisation globale.
Une solution à ce problème serait de définir un critère d'échantillonnage qui permettrait d'enrichir l'échantillon d'expérience en faisant un compromis entre recherche dans les régions les plus inexplorées (exploration) et recherche locale autour des maxima courants (exploitation).

3.2.1 Amélioration espérée pour une fonction déterministe

Un critère communément utilisé qui fait un compromis entre l'amélioration et l'exploration est le critère AE.
Soit f une fonction objective à optimiser,

$$f : X \to R \text{ où } X \subseteq R^d$$

L'amélioration est définie comme étant le dépassement d'un seuil qui est la valeur maximale observée sur le plan d'expérience.
Soit $y_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$ ce maximum observé, l'amélioration au point x peut être définie par :

$$I(x) = [f(x) - y_{max}]_+$$

où $[z]_+ = \max(0, z)$

Cette amélioration ne peut pas être connue à l'avance car la fonction f n'est pas encore évaluée au point x, mais on va la supposer être la réalisation d'un processus gaussien Y de moyenne et de covariance connues. On redéfinit alors l'amélioration comme suit :

$$I(x) = [Y(x) - y_{max}]_+$$

L'amélioration au point x est une variable aléatoire dont on connait la loi conditionnellement aux observations déjà réalisées puisqu'on connait la loi conditionnelle de $Y(x)$. On peut alors calculer l'espérance de cette amélioration que l'on appellera amélioration espérée :

$$AE(x) = E\left[(Y(x) - y_{max})_+ |Y(x_1), \cdots, Y(x_n)\right] \tag{1}$$

Le nouveau point d'évaluation est choisi de manière à maximiser le critère d'amélioration espérée.

3.2.2 Autres critères dans le cas d'un modèle bruité

Avec un modèle bruité, chaque sortie $\tilde{y}_i$ est considérée comme une réalisation d'une variable aléatoire somme d'un processus et d'un bruit blanc gaussiens.

$$\tilde{y}_i = y(x_i) + \epsilon_i$$

On supposera que les bruits ϵ_i sont indépendants, identiquement distribués et que $\epsilon_i \sim N(0, \tau_i^2)$.
Le principe est le même que pour le krigeage d'une fonction déterministe. A partir des évaluations de la fonction objective aux points d'un plan initial $D = \{x_1, \cdots, x_n\}$, le krigeage consiste à considérer la fonction f comme la réalisation d'un processus $\tilde{Y}_i = Y(x_i) + \epsilon_i$.
A condition que le processus Y et le bruit gaussien $(\epsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ soient stochastiquement indépendants, la distribution du processus Y conditionnellement aux événements

$$\tilde{E}_n = \{Y(x_1) + \epsilon_1 = \tilde{y}_1, \cdots, Y(x_n) + \epsilon_n = \tilde{y}_n\}$$

est normale [9].
Conditionnellement aux n observations, les expressions de la moyenne $m_n(x)$ et de la variance de krigeage $s_n^2(x)$ sont les mêmes que celles données par le krigeage d'un modèle déterministe [7]. La seule différence réside du fait que la matrice de covariance $K = (k(x_i, x_j))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sera remplacée par $\tilde{K} = K + \Gamma$ où Γ est la matrice diagonale de la variance du bruit aléatoire.
Dans le cas où la fonction est bruitée, et que la variance du bruit est homogène et égale à τ^2,

Huang *et al.* [10] proposent de remplacer le maximum observé y_{max} par le maximum du quantile prédit : $\hat{T} = m_n(x^{**})$ où

$$x^{**} \in \text{argmax}_{1\leq i\leq n} \left(m_n(x_i) + \Phi^{-1}(\beta) \times s_n(x_i)\right)$$

Φ étant la fonction de répartition de la loi normale, la valeur de $\beta = 0.84$ correspondant à $\Phi^{-1}(\beta) = 1$ est recommandée dans [10].
Pour que l'amélioration espérée obtenue soit moins sensible au bruit, elle sera multipliée par : $\left(1 - \dfrac{\tau}{\sqrt{s_n^2 + \tau^2}}\right)$. Ce facteur amplifie l'importance de la variance de krigeage, améliorant ainsi l'exploration. Un nouveau critère d'échantillonnage appelé amélioration espérée augmentée (AEI) est ainsi défini :

$$AEI(x) = \left(E\left[\left(Y(x) - \hat{T}\right)_+ |\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)\right]\right) \times \left(1 - \frac{\tau}{\sqrt{s_n^2 + \tau^2}}\right)$$

Une autre possibilité d'après Picheny *et al.* [7] serait de définir l'amélioration sur le quantile du krigeage. En effet, dans le cas où la fonction est bruitée, le métamodèle peut être plus proche de la vraie valeur que des données observées, par conséquent, une amélioration devrait se référer à l'effet d'une nouvelle observation sur le métamodèle.
Considérant le quantile de krigeage $q_n(x) = m_n(x) + \Phi^{-1}(\beta)s_n(x)$ comme mesure de référence, Picheny *et al.* [7] ont défini l'amélioration comme étant le dépassement du meilleur β quantile, entre l'étape courante (n) et l'étape suivante ($n + 1$) :

$$I(x) = [q_{n+1}(x_{n+1}) - \max_{1\leq i\leq n} q_n(x_i)]_+ \tag{2}$$

De même que dans le cas d'un modèle déterministe, cette amélioration ne peut pas être connue à l'avance, car $q_{n+1}(x_{n+1})$ dépend de la future observation $\tilde{y}_{n+1} = f(x_{n+1})$. Cependant, en utilisant le modèle de krigeage, q_{n+1} peut être remplacé par Q_{n+1} où Q_{n+1} est la fonction quantile du modèle de krigeage que l'on attend après la mise à jour avec un nouveau point.
Picheny *et al.* [7] ont alors défini l'amélioration pour les quantiles par :

$$I(x) = [Q_{n+1}(x) - \max_{1\leq i\leq n} q_n(x_i)]_+$$

(où Q_{n+1} est mis en majuscule afin de souligner qu'il est une fonction aléatoire).
Soit $q_{max} = \max_{1\leq i\leq n} q_n(x_i)$ avec $q_n(x) = m_n(x)+\Phi^{-1}(\beta)s_n(x)$, $m_n(x) = E[Y(x)|\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)]$ et $s_n^2(x) = \text{Var}[Y(x)|\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)]$.
L'amélioration espérée sur les quantiles (EQI) est définie par :

$$EQI(x) = E\left[(Q_n(x) - q_{max})_+ |\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)\right] \tag{3}$$

En se basant sur le fait que, conditionnellement à $\tilde{E}_n = \{Y(x_1) + \epsilon_1 = \tilde{y}_1, \cdots, Y(x_n) + \epsilon_n = \tilde{y}_n\}$ le processus $\tilde{Y}_{n+1}$ est gaussien de moyenne et de variance connues, Picheny *et al.* [7] ont montré que conditionnellement aux n observations bruitées, la distribution de Q_{n+1} est gaussienne, ce qui conduit à une formule analytique pour EQI :

$$EQI(x) = (m_Q(x) - q_{max}) \times \Phi(\frac{m_Q(x) - q_{max}}{s_Q(x)}) + s_Q(x) \times \phi(\frac{m_Q(x) - q_{max}}{s_Q(x)})$$

où q_{max} est le meilleur quantile courant, m_Q et s_Q indiquent respectivement la moyenne et l'écart type de Q_{n+1}, Φ et ϕ indiquent respectivement la fonction de répartition et la fonction de densité

de la loi normale.
La nouvelle observation $\tilde{y}(x)$ étant une réalisation de la variable aléatoire gaussienne de moyenne $m_n(x) = E[Y(x)|\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)]$ et de variance $s_n^2(x)+\tau_{new}^2 = \mathrm{Var}[Y(x)|\tilde{Y}(x_1), \cdots, \tilde{Y}(x_n)]+\tau_{new}^2$, τ_{new}^2 désigne la variance du bruit au nouveau point x , Picheny *et al.* [7] ont montré que :

$$m_Q(x) = m_n(x) + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\frac{\tau_{new}^2 s_n^2(x)}{\tau_{new}^2 + s_n^2(x)}} \ ; \ s_Q^2(x) = \frac{[s_n^2(x)]^2}{\tau_{new}^2 + s_n^2(x)}$$

4 Optimisation conditionnelle : recherche d'une ligne de crête

Nous avons un problème d'optimisation d'une fonction conditionnellement au climat qui dépend du lieu où l'on se trouve. Pour chaque lieu u fixé, nous voulons déterminer le jeu de paramètres variétaux v qui maximise l'espérance ou le quantile du rendement. Supposons qu'il y ait N points sur la carte, nous avons besoin de trouver les ensembles

$V_1 = \{v^*(u_1), \cdots, v^*(u_N)\}$ ou encore $V_2 = \{v_\alpha^*(u_1), \cdots, v_\alpha^*(u_N)\}$

où $v^*(u_i) = \mathrm{argmax}_v E\left[f(u_1, v)\right]$ représente le jeu de paramètres variétaux qui maximise le rendement moyen à l'endroit u_i et $v_\alpha^*(u_i) = \mathrm{argmax}_v Q_\alpha\left[f(u_i, v)\right]$ le jeu de paramètres variétaux qui maximise le rendement dépassé avec une probabilité $1-\alpha$ à l'endroit u_i.
On va alors rechercher pour chaque lieu u_0 fixé, l'optimum de $E\left(f(u,v)\right)$ ou de $Q_\alpha\left(f(u_i,v)\right)$ conditionnellement à $u = u_0$. Cela revient à trouver une ligne de crête (L) qui est de la forme :

$$L = \{(u_0, \mathrm{argmax}_{v\in V} E\left[f(u,v)\,|\,u = u_0\right])\}$$

ou encore

$$L = \{(u_0, \mathrm{argmax}_{v\in V} Q_\alpha\left[f(u_i,v)\,|\,u = u_0\right])\}$$

où $u \in A$, avec A l'ensemble des lieux et V l'ensemble des paramètres variétaux.
L'ensemble des entrées X est donc partitionné en deux groupes : un premier groupe contenant les variables conditionnantes noté A et un deuxième groupe de variables conditionnées noté V. Pour une optimisation globale, un critère d'échantillonnage est défini pour guider l'échantillonnage vers les meilleurs points sur l'ensemble des entrées $X = A \times V$; ici nous recherchons un critère qui permet de cibler les meilleurs paramètres variétaux pour chaque valeur de u fixée.
Nous redéfinissons alors l'amélioration sur les quantiles de krigeage (2) sous une forme conditionnelle :

$$I(u,v) = [Q_{n+1}(u,v) - \min(\max_{w\in V} q_n(u,w), \max_{1\leq i\leq n} q(u_i,v_i))]_+$$

En effet, pour un u fixé la valeur exacte du maximum courant n'est pas connue, de même qu'elle n'était pas connue pour une fonction bruitée. Notre approche consiste à comparer $Q_{n+1}(u,v)$ avec $\max_{w\in V} q_n(u,w)$ pour chaque lieu u fixé.

L'amélioration ainsi définie est une variable aléatoire dont à chaque étape n on connaît la loi conditionnellement aux observations. On peut alors calculer son espérance que l'on appellera amélioration conditionnelle sur les quantiles ($PEQI$)

$$PEQI(u,v) = E\left[\left(Q_{n+1}(u,v) - \min(\max_{w\in V} q_n(u,w), \max_{1\leq i\leq n} q(u_i,v_i))\right)_+ |\tilde{Y}(u_1,v_1), \cdots, \tilde{Y}(u_n,v_n)\right] \tag{4}$$

Posons $PEQI^*(u) = \max_{w\in V} PEQI(u,w)$. Soit $u^* = \mathrm{argmax}_{u\in A} PEQI^*(u)$, le prochain point à évaluer sera le point $x^* = (u^*, \mathrm{argmax}_{w\in V} PEQI(u^*,w))$

4.1 Algorithme d'optimisation pour la recherche d'une ligne de crête

Nous définissons l'algorithme d'optimisation comme suit :

1. Réalisation d'un plan initial $D = \{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\}$.
2. Construction du métamodèle de krigeage à partir du plan d'expérience.
3. Pour tout $(u, v) \in A \times V$, calculer $q_n(u, w)$ le quantile de prédiction.
4. Sélectionner une grille G de points sur la carte et évaluer pour chacun $\max_{w \in V} q_n(u, w)$.
5. Rechercher le point (u^*, v^*) solution de $\max_{u \in G} \max_{u \in V} PEQI(u, v)$
6. Calcul du vrai modèle en ce point.
7. Ajout du point au plan initial et mise à jour du métamodèle.

Les étapes de 3, 4, 5, 6 et 7 sont répétées N fois. Le nombre N d'itérations est fixé à l'avance en fonction du budget de l'utilisateur.
Sous certaines hypothèses sur la fonction de covariance, Sambakhé et al [11] montrent que la suite de points générée par cet algorithme d'optimisation est dense dans le domaine de la recherche donc converge.

Bibliographie

[1] Wallach, D., Makowski, D., Jones, J. (2006), *Working with dynamic crop models : Evaluation, Analysis, Parameterization and Applications*, Elsevier BV, xiv + 447 p.
[2] Bonte, M.H.A., van den Boogaard, A.H., Huétink, J., 2008. *An optimisation strategy for industrial metal forming processes.* Struct. Multidiscip. Optim. 35, 571–586. doi :10.1007/s00158-007-0206-3.
[3] Queipo, N. V., R. T. Haftka, W. Shyy, T. Goel, R. Vaidyanathan, and P. K. Tucker, *Surrogate-based analysis and optimization*, Progress in Aerospace Sciences 41, pp.1–28, 2005.
[4] J. Janusevskis and R. Le Riche, *Simultaneous kriging-based estimation and optimization of mean response*, Journal of Global Optimization, Springer, DOI 10.1007/s10898-011-9836-5, published online in Jan. 2012.
[5] Ginsbourger, D. (2009), *Multiples métamodèles pour l'approximation et l'optimisation de fonctions numériques multivariables*, Thèse, École nationale supérieure des mines de Saint-Étienne.
[6] Jones, D.R., Schonlau, M., Welch, W.J. (1998), *Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions*, J. Glob. Optim. 13, 455–492.
[7] Picheny, V., Ginsbourger, D., Richet, Y., Caplin, G.(2013), *Quantile-Based Optimization of Noisy Computer Experiments With Tunable Precision*, Technometrics 55, 2–13.
[8] Ginsbourger, D., Baccou, J., Chevalier, C., Perales, F., Garland, N., Monerie, Y.(2014), *Bayesian Adaptive Reconstruction of Profile Optima and Optimizers*, SIAM/ASA J. Uncertain. Quantif. 2, 490–510.
[9] Ginsbourger D, Picheny V, Roustant O, Richet Y (2008) *A new look at Kriging for the approximation of noisy simulators with tunable fidelity.* In : 8th ENBIS conference, Athens, Greece.
[10] Huang D, Allen T, Notz W, Zeng N (2006b) *Global optimization of stochastic black-box systems via sequential kriging meta-models.* J Glob Optim 34(3) :441–466.
[11] Sambakhé, D., Gozé, E., Rouan, L., Bacro, JN. (2016), *Conditional optimization of a noisy function using a gaussian process metamodel - with application to genotype's yield maximization in a variable environment.* Submitted for publication.