ESTIMATION NON-PARAMÉTRIQUE DU TAUX DE SPIKE DANS UN SYSTÈME DE NEURONES EN INTERACTION.

P. HODARA, N. KRELL, E. LÖCHERBACH

Résumé

Mots clés: PDMP, modèle en neuroscience, estimation non-paramétrique, estimateur à noyau.

Le but de cet exposé est de réaliser une étude statistique d'un certain processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP) qui modélise l'activité d'un réseau de neurones. Notre but est de construire un estimateur pour le taux de saut du PDMP, i.e. la fonction qui mesure l'acitivité du réseau en terme d'emission de potentiels d'action (ou spikes). Les PDMP's ont été introduits par Davis ([3] et [4]). Ils forment une famille de processus de Markov càdlàg dont les trajectoires suivent une dérive déterministe perturbée par des sauts aléatoires.

Notre PDMP est un processus $X_t = (X_t^1, ..., X_t^N)$, où N est le nombre de neurones dans le réseau, et chaque coordonnée X_t^i de X_t représente le potentiel de membrane d'un neurone i particulier. Son générateur est le suivant:

$$L\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\left[\varphi(\Delta_i(x)) - \varphi(x)\right] - \lambda \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\left[x_i - m\right] \right),$$

où

$$(\Delta_i(x))_j = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{N} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{array} \right\}, j = 1, ..., N.$$

Ce générateur est défini ainsi afin de décrire la dynamique suivante. La dérive déterministe du PDMP attire le potentiel de membrane de chaque neurone vers un potentiel d'équilibre m avec une vitesse exponentielle. De plus, un neurone dont le potentiel de membrane vaut x "spike" (i.e. saute) avec une intensité $f(x)$. Quand un neurone spike, son potentiel de membrane est remis à 0, et celui de chacun des autres neurones est augmenté de $\frac{1}{N}$.

Notre estimateur à noyau pour le taux de saut f est, pour faire simple, de la forme

$$\hat{f}_t(a) = \frac{\sharp \text{ spikes pour des positions dans } B(a)}{\text{temps d'occupation de } B(a)},$$

où $B(a)$ est un voisinage de la position a à laquelle on estime le paramètre f. Afin de définir cet estimateur de manière plus rigoureuse, on définit une mesure de sauts et une mesure de temps d'occupation pour notre processus X. Le fait que le compensateur de la mesure de sauts soit précisément la mesure de temps d'occupation intégrée contre le taux de saut f nous donne une mesure de martingale qui nous permet d'obtenir la convergence de notr estimateur. On suppose que la fonction de taux de saut f appartient à une certaine classe de fonctions Hölderiennes d'ordre de régularité β, et on obtient pour notre estimateur la vitesse de convergence optimale et classique de l'ordre de $t^{-\frac{\beta}{2\beta+1}}$ pour l'erreur dans L^2. On établit aussi deux résultats probabilistes dont on a besoin pour l'estimation. Le premier est le

caractère récurrent positif au sens de Harris de notre PDMP. Le second est l'existence d'une fonction de densité régulière pour la mesure invariante.

L'estimation non-paramétrique pour les PDMP's a déjà été étudiée dans la littérature, cf par exemple [1], et plus particulièrement l'estimation du taux de saut: cf [2]. Dans ce modèle, le PDMP est multidimensionnel et il y a des interactions spécifiques entre les particules. Pour cette raison, l'utilisation d'une "many-to-one formula" comme dans [8] n'est pas possible. De même, une technique de changement de variable comme dans [9] n'est pas applicable dans notre cas. De plus notre noyau de transition pour les sauts est dégénéré, ce qui nous amène à construire notre estimateur d'une manière différente de celles proposées dans de précédentes études.

On trouve également dans la littérature un certain nombre de travaux sur la modélisation d'un réseau de neurones: [6] et [7] par exemple utilisent des processus de Hawkes. Notre modèle est plus proche de celui de Duarte et Ost [5], ce qui nous permet d'appliquer certains de leurs résultats dans notre cadre.

Summary

Keywords. PDMP, neuroscience models, non-parametric estimation, kernel estimator.

The purpose of this talk is to perform a statistic study of a certain Piecewise Deterministic Markov Process (PDMP) modelling the activity of a neural network. Our aim is to build an estimator for the underlying jump rate of the PDMP, i.e. the function measuring the spiking activity. PDMP's have been introduced by Davis ([3] and [4]). They form a family of càdlàg Markov processes following a deterministic drift with random jumps.

In this talk, our PDMP is a process $X_t = (X_t^1, ..., X_t^N)$, where N is the number of neurons in our network, and each coordinate X_t^i of X_t represents the membrane potential of a particular neuron. It has the following generator:

$$L\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\left[\varphi(\Delta_i(x)) - \varphi(x)\right] - \lambda \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\left[x_i - m\right] \right),$$

where

$$(\Delta_i(x))_j = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{N} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{array} \right\}, j = 1, ..., N.$$

This generator gives to our process the following dynamics. The deterministic drift of the PDMP attracts the membrane potential of each neuron to an equilibrium potential m with an exponential speed. Moreover, a neuron with membrane potential x "fires" (i.e. jumps) with intensity $f(x)$. When a neuron fires, its membrane potential is reset to 0, while the membrane potentials of the other neurons are increased by $\frac{1}{N}$.

Our kernel estimator for the jump rate f is roughly speaking of the form

$$\hat{f}_t(a) = \frac{\sharp \text{ spikes in positions in } B(a)}{\text{occupation time of } B(a)},$$

where $B(a)$ is a neighbourhood of the position a where we estimate the parameter f. To define this estimator more rigorously, we define a jump measure and an occupation time measure for our process X. The fact that the compensator of the jump measure is the occupation time measure integrated against the jump rate function f gives us a martingale measure which allows us to obtain the convergence of our estimator. We assume that the jump rate function f belongs to a certain Hölder class of order of regularity β, and obtain for our estimator the classical optimal speed of

convergence of order $t^{-\frac{\beta}{2\beta+1}}$ for the error in L^2. We also state two probabilistic results we will need for the estimation. The first one is the positive Harris recurrence of our PDMP. The second one is the existence of a regular density function for the invariant measure.

In the literature, non-parametric estimation for PDMP's has already been studied, as in [1] and more particularly estimation of the jump rate, as in [2]. In this model, the PDMP is multidimensional and we have real interactions between the particles. This prevents us to use a "many-to-one formula" as in [8] or a change of variable technique as in [9]. Moreover, our jump transition kernel is degenerate, this is why the construction of our estimator is different from other constructions in previous studies.

Many papers in the literature deal with the modelisation of a neural network: [6] and [7] for example use Hawkes Processes. Our model is closer to the one of Duarte and Ost [5], which allows us to apply some of their results in our work.

Description de la communication

Dans une première partie je décrirai le modèle et la construction de l'estimateur. Dans une deuxième partie j'énoncerai les propriétés de récurrence au sens de Harris du processus ainsi que l'existence d'une fonction de densité régulière pour la mesure invariante. Je donnerai par la même occasion des idées de preuve pour ces résultats. Dans une troisième partie j'énoncerai notre résultat principal: la vitesse de convergence pour notre estimateur et son caractère optimal. Je décrirai également rapidement le principe de la preuve.

Les Auteurs

Pierre Hodara, université de Cergy-Pontoise. pierre.hodara@sfr.fr

Nathalie Krell, IRMAR (Université de Rennes 1). nathalie.krell@univ-rennes1.fr

Eva Löcherbach, université de Cergy-Pontoise. eva.loecherbach@u-cergy.fr

References

[1] Azaïs, R., Dufour,F., Gégout-Petit, A. Nonparametric estimation of the conditional distribution of the inter-jumping times for piecewise-deterministic Markov processes. *Scandinavian Journal of Statistics , Vol 41, issue 4* (2014) 950 – 969.

[2] Azaïs, R., Muller-Gueudin, A. Optimal choice among a class of nonparametric estimators of the jump rate for piecewise-deterministic Markov processes. (2015) Available on http://arxiv.org/abs/1506.07722

[3] Davis, M.H.A. Piecewise-derministic Markov processes: a general class off nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 46(3)* (1984) 353 – 388.

[4] Davis, M.H.A. Markov models and optimization. *Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 49* Chapman & Hall, London. (1993)

[5] Duarte, A., Ost, G. A model for neural activity in the absence of external stimuli. Available on http://arxiv.org/abs/1410.6086, 2014.

[6] Galves, A., Löcherbach, E. Infinite systems of interacting chains with memory of variable length–a stochastic model for biological neural nets. *J. Stat. Phys. 151*, 5 (2013), 896–921.

[7] Hodara, P., Löcherbach, E. Hawkes processes with variable length memory and an infinite number of components. (2014) Available on http://arxiv.org/abs/1410.5235

[8] Hoffmann, M., Olivier, A. Nonparametric estimation of the division rate of an age dependent branching process. To appear in *Stochastic Processes and their Applications* see also http://arxiv.org/abs/1412.5936

[9] Krell, N. Statistical estimation of jump rates for a specific class of Piecewise Deterministic Markov Processes. Available on http://arxiv.org/abs/1406.2845