

ANALYSE DE DONNÉES GNSS EN VUE DE L'AMÉLIORATION D'UN REPÈRE DE RÉFÉRENCE (GÉODÉSIE)

Clément Benoist* & Paul Rebischung* & Zuheir Altamimi*

* *IGN/LAREG, Bâtiment Lamarck, 5 rue Thomas Mann, Case courrier 7071, 75 205
Paris Cedex 13, clement.benoist@ign.fr*

Résumé. La géodésie est l'étude des dimensions et de la forme de la Terre. Parmi d'autres techniques d'observation, des stations géodésiques GNSS distribuées à la surface de la Terre permettent d'obtenir des séries temporelles de coordonnées décrivant leurs mouvements dus, entre autres, à la tectonique des plaques. L'analyse détaillée de ces séries temporelles est importante pour mieux déterminer les mouvements des stations ainsi que leurs incertitudes. Dans cette étude, nous estimerons dans un premier temps les caractéristiques du bruit de ces séries temporelles, station par station, par la méthode du maximum de vraisemblance. Une perspective d'étude sera l'utilisation d'un filtre de Kalman pour tenir compte en outre des dépendances spatiales du bruit et des mouvements des stations. Cette étude contribue à améliorer l'ITRF (International Terrestrial Reference Frame), un repère de référence fondamental pour l'observation de la Terre.

Mots-clés. Maximum de vraisemblance, séries temporelles, bruit de scintillation, ITRF, géodesie, GNSS/GPS

Abstract. Geodesy is the study of the dimensions and of the shape of the Earth. Among other observation techniques, geodetic GNSS stations distributed all over the Earth allow to derive coordinate time series describing their motions due to, e.g., plate tectonics. A detailed analysis of these coordinate time series is important to improve the determination of the station motions and of their uncertainties. In this study, we will first estimate the noise characteristics of the station coordinate time series by maximum likelihood. A perspective will be the use of a Kalman filter to additionally account for the spatial correlations of the noise and of the station motions. This study contributes to improve the International Terrestrial Reference Frame (ITRF), a fundamental reference for Earth observation.

Keywords. Maximum likelihood, time series, flicker noise, ITRF, geodesy, GNSS/GPS

1 Introduction

L'ITRF (international terrestrial reference frame) est un repère de référence qui consiste en un jeu de positions et de vitesses pour un ensemble de stations géodésiques réparties sur la Terre ; en termes géodésiques, l'ITRF est une représentation conventionnelle

des positions des stations géodésiques au cours du temps donc de la forme de la Terre au cours du temps. Elle n'a qu'une validité locale d'un point de vue temporel. L'ITRF s'appuie sur les données de positions de stations estimées à partir des quatre techniques de géodésie spatiale parmi lesquelles les GNSS (**g**lobal **n**avigation **s**atellite **s**ystem) dont le GPS (**g**lobal **p**ositioning **s**ystems) est la déclinaison américaine. Mon travail vise à débruiter les positions GNSS et à en connaître les caractéristiques. Nous nous plaçons dans un repère topocentrique, centré sur la station, qui définit des coordonnées Nord (N), Est (E) et Up (U).

2 Modélisation des séries temporelles de coordonnées de position GNSS

Nous considérons t° une époque de référence connue. Soit $(t_i)_{i=1}^n$ des instants de mesure connus et $(X_i)_{i=1}^n$ les mesures de position associées. Les t_i sont supposés régulièrement échantillonnés avec des valeurs manquantes. Nous utilisons le modèle suivant :

$$X_i = x_{\alpha_{pos}(i)}^\circ + (t_i - t^\circ)\dot{x}_{\alpha_{vit}(i)} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos(\omega_j(t_i - t^\circ)) + b_j \sin(\omega_j(t_i - t^\circ))) + \varepsilon_i$$

où les $x_k^\circ, k \in \llbracket 1, n_{pos} \rrbracket$, les $\dot{x}_k, k \in \llbracket 1, n_{vit} \rrbracket$, les a_j et les b_j ($j \in \llbracket 1, m \rrbracket$) sont à estimer, où les $\omega_j = 2\pi/T_j$ sont des pulsations fixées connues (T_j est la période associée) et où ε_i représente le bruit. Les \dot{x}_k représentent des vitesses, les x_k° représentent des ordonnées à l'origine t° et les a_j et les b_j les amplitudes associées aux périodes T_j , les fonctions croissantes (au sens large) $\alpha_{pos} : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n_{pos} \rrbracket$ et $\alpha_{vit} : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n_{vit} \rrbracket$, connues, permettent de tenir compte des discontinuités de position et de vitesse.

Nous avons différents modèles de bruit. Le plus connu est le bruit blanc homogène (WH) $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ où les η_i sont indépendants identiquement distribués. Le bruit blanc variable (VW) est une variante du bruit blanc $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, \beta^2 \sigma_{i,SINEX}^2)$ où $\sigma_{i,SINEX}$ est un écart-type connu associé à l'erreur de mesure à l'instant t_i et où les η_i sont indépendants identiquement distribués.

La littérature évoque la nécessité de considérer du bruit corrélé [Langbein and Johnson, 1997]; cela fournit une incertitude plus réaliste pour les paramètres déterministes (notamment la vitesse). Le bruit de scintillation est un bruit dont la densité spectrale de puissance en $1/f$ où f est la fréquence. Son amplitude σ_{FN} est définie dans [Williams, 2003] à partir de sa densité spectrale de puissance :

$$P(f) = \frac{\sigma_{FN}^2}{2\pi^2 f}$$

On considère principalement les modèles de bruits WH+FN et VW+FN. Les matrices de variance-covariance du bruit de scintillation sont données par Williams [2003]. Pour le

Composante	Vitesse de cette étude	Vitesse ITRF	Vitesse CATS
N	-10.35	-10.36	-10.33
E	-13.20	-13.15	-13.20
U	0.58	0.77	0.58

TABLE 1 – Différentes vitesses (en mm/an) calculées selon différentes méthodes

modèle WH+FN, on peut écrire la matrice de variance-covariance sous la forme suivante :

$$C = \sigma_w^2 \text{Id} + \sigma_{FN}^2 C_{FN}$$

où C_{FN} est la matrice de variance-covariance du bruit de scintillation d'amplitude unité fournie par Williams [2003]. Pour VW+FN, on a :

$$C = \beta^2 C_{VW} + \sigma_{FN}^2 C_{FN}$$

où C_{VW} est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\sigma_{i,SINEX}^2$.

Les paramètres du modèle de bruit et du modèle déterministe sont estimés par maximum de vraisemblance et moindres carrés. On maximise la log-vraisemblance par rapport au paramètre $\theta = (\sigma_w, \sigma_{FN})$ pour WH+FN ou $\theta = (\beta, \sigma_{FN})$ pour VW+FN :

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \left(\ln \det C + \hat{\nu}^T C^{-1} \hat{\nu} + n \ln(2\pi) \right)$$

où $\hat{\nu}$ sont les résidus issus des moindres carrés pondérés associés à la matrice de variance-covariance C .

L'optimisation algorithmique proposée par Williams [2008] permet de diminuer la dimension du problème du point de vue de l'optimisation du maximum de vraisemblance, ce qui diminue considérablement le temps de calcul. Plusieurs méthodes d'optimisation sont utilisées et on garde la meilleure.

3 Résultats

Nous présenterons les résultats du maximum de vraisemblance pour les stations géodésiques. Prenons l'exemple de la station DRAO (figure 1 pour la composante Nord). L'hypothèse d'une tendance linéaire semble très adaptée ; les termes harmoniques sont surtout utiles pour la composante Up (cf. figure 2). Nous avons considéré les périodes annuelles et semi-annuelles. Nous sommes dans le cas où $m = 2$. Préalablement, les valeurs aberrantes ont été éliminées grâce aux résidus studentisés. L'optimisation s'effectue par la méthode de Brent et par L-BFGS-B et leurs initialisations s'effectuent par estimation spectrale.

La table 1 montre les différentes vitesses des stations. La méthode de calcul des vitesses des stations utilisées dans cette étude et le programme CATS [Williams, 2008] sont

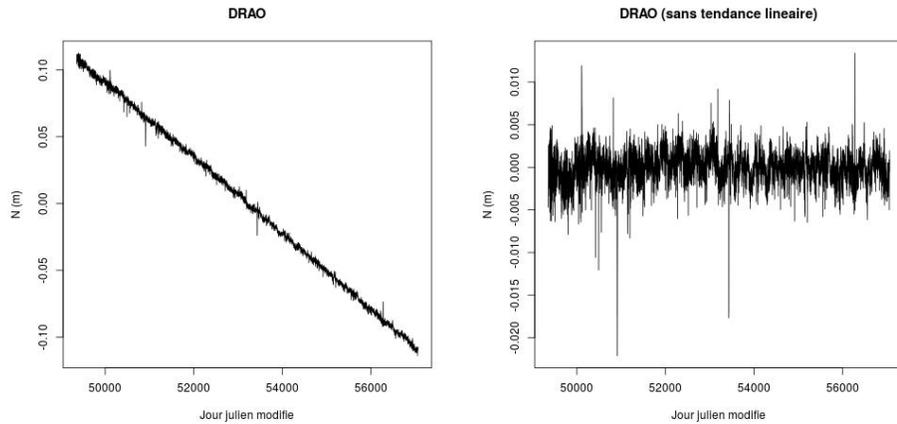


FIGURE 1 – Composante Nord de la série temporelle de positions GNSS de la station DRAO (Penticton, Canada) avec et sans tendance linéaire

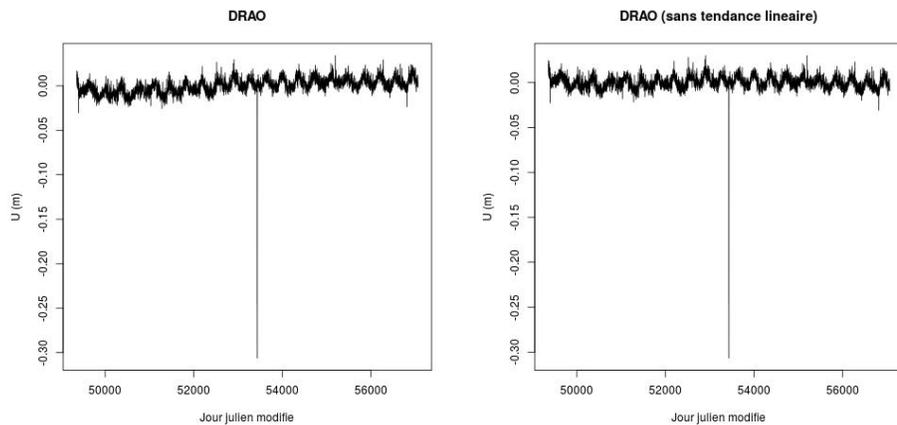


FIGURE 2 – Composante Up de la série temporelle de positions GNSS de la station DRAO (Penticton, Canada) avec et sans tendance linéaire

		annuel		semi-annuel	
		$\widehat{\cos}$	$\widehat{\sin}$	$\widehat{\cos}$	$\widehat{\sin}$
N	ML	0.166	0.320	-0.200	-0.034
	CATS	0.163	0.319	-0.200	-0.035
E	ML	1.347	0.726	0.205	-0.135
	CATS	1.343	0.730	0.205	-0.135
U	ML	0.939	-5.042	-1.480	0.289
	CATS	0.949	-5.039	-1.475	0.281

TABLE 2 – Amplitudes estimées des signaux périodiques annuels et semi-annuels exprimées en mm. L'époque de référence est le 1er janvier précédant le premier instant d'échantillonnage. Différents programmes sont utilisés ; ML correspond à cette étude.

		$\hat{\beta}$	$\hat{\beta} \text{ med}(\sigma_{i,SINEX})$	$\hat{\sigma}_{FN}$
N	ML	1.453	0.7	4.85
	CATS	1.454	0.7	4.86
E	ML	1.896	0.7	4.33
	CATS	1.896	0.7	4.33
U	ML	1.17	1.6	15.0
	CATS	1.20	1.6	14.9

TABLE 3 – Amplitudes estimées des signaux de bruit. La notation med désigne la médiane ; $\text{med}(\sigma_{i,SINEX})$ s'exprime en millimètre. Différents programmes sont utilisés ; ML correspond à cette étude. L'amplitude β est sans unité et σ_{FN} s'exprime en $\text{mm}/\text{an}^{1/4}$

semblables car elles utilisent le même modèle de bruit, les mêmes données (aux rares valeurs aberrantes éliminées près). Contrairement à cette étude, l'ITRF n'utilise que du bruit blanc dans sa modélisation du bruit.

La table 2 fournit des estimations des amplitudes de signaux périodiques. On remarque que des signaux périodiques sont plus présents sur la composante verticale que sur les composantes horizontales car ils proviennent essentiellement des déformations de surcharge (hydrologique, atmosphérique...). Remarquons que les estimations des amplitudes des signaux périodiques obtenues dans cette étude concordent avec CATS.

La table 3 présente le résultat des estimations des amplitudes de bruit. Pour les amplitudes de bruit, les estimations de CATS et celles obtenues dans cette étude concordent. Comme attendu par les géodésiens, le bruit est plus important sur la composante verticale que les composantes horizontales.

4 Perspectives

Le maximum de vraisemblance station par station prépare à l'utilisation d'un filtre de Kalman station par station. Suivra un filtre de Kalman spatiotemporel qui permettra de considérer la dépendance spatiotemporelle. Le bruit de scintillation sera approximé par la somme de trois AR(1), ce qui est compatible avec un filtre; une approche similaire a été proposée par David et al. [2005] et reprise par Dmitrieva et al. [2015] dans le domaine de la géodésie. L'avantage principal du filtre de Kalman est de permettre de pouvoir traiter un grand nombre de données avec un temps de calcul réduit.

Remerciements

Merci à O. Jamet, L. Métivier, X. Collilieux et F. Casenave pour leurs conseils.

Bibliographie

- [Altamimi et al., 2016] Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L. & Collilieux, X. *ITRF2014*, http://itrf.ign.fr/ITRF_solutions/2014/
- [Byrd et al., 1995] Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J. and Zhu, & C. (1995) A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM J. Scientific Computing*, 16, 1190–1208.
- [Davis et al., 2005] Davis, J. A., Greenhall, C. A., & Stacey, P. W. (2005). A Kalman filter clock algorithm for use in the presence of flicker frequency modulation noise. *Metrologia*, 42(1), 1.
- [Dmitrieva et al., 2015] Dmitrieva, K., Segall, P., & DeMets, C. (2015). Network-based estimation of time-dependent noise in GPSs position time series. *Journal of Geodesy*.
- [Langbein and Johnson, 1997] Langbein, J., & Johnson, H. (1997). Correlated errors in geodetic time series : Implications for time-dependent deformation. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*. 102, 591-603.
- [Santamaría et al., 2011] Santamaría-Gómez, A., Bouin, M.-N., Collilieux, X., & Wöppelmann, G. (2011). Correlated errors in GPS position time series : Implications for velocity estimates. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*. 116.
- [Williams, 2003] Williams, S. D. P. (2003). The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series, *Journal of Geodesy*, 76(9-10), 483-494.
- [Williams, 2008] Williams, S. D. P. (2008). CATS : GPS coordinate time series analysis software. *GPS Solutions : The Journal of Global Navigation Satellite Systems*. 12, 147-153.